

Näherungen und Fehler

Absolute & relative Fehler



Einführung

Bei jeder Messung oder Schätzung einer Größe wird ein Fehler gemacht. Es lassen sich zwei Arten von Fehlern unterscheiden:

Der absolute Fehler ε ist definiert als die positive Differenz zwischen dem tatsächlichen Wert \bar{x} einer bestimmten Größe und dem geschätzten Wert x_i .

$$\varepsilon = |\bar{x} - x_i|$$

Manchmal erscheint der absolute Fehler nach dem geschätzten Wert und mit einem vorangestellten \pm -Zeichen, das den Bereich angibt, in dem der wahre Wert liegt.

Der relative Fehler ε_r ist definiert als der Quotient aus dem absoluten Fehler und dem wahren Wert \bar{x} der Größe. Sie kann in % oder als Anteil von 1 ausgedrückt werden.

$$\varepsilon_i = \frac{|\bar{x} - x_i|}{\bar{x}}$$

Beispiel: Es wurde geschätzt, dass sich in einem Münzbeutel 160 Münzen befinden, aber wenn man sie einzeln zählt, stellt man fest, dass es tatsächlich 156 Münzen sind.

Absoluter Fehler: $\varepsilon = |156 - 160| = 4$ Münzen

Relativer Fehler: $\varepsilon_r = \frac{4}{156} = 0,026 = 2,6\%$

Aufgabe 1

Berechne den absoluten und relativen Fehler bei der Schätzung eines Zeitintervalls von 15 Minuten, das tatsächlich 16,5 Minuten dauert.

Aufgabe 2

Es wird geschätzt, dass sich in einem Ameisenhaufen 2 000 Ameisen befinden, mit einem Fehler von 15 %. Wie viele Ameisen sind maximal und wie viele minimal in dem Ameisenhaufen zu erwarten?

Aufgabe 3

Die Entfernung von der Erde zum Mond wurde berechnet. Das Ergebnis ist 385 000 km. Ein Laser hat jedoch festgestellt, dass die tatsächliche Entfernung 357 000 km beträgt. Wie groß ist der relative Fehler bei den Berechnungen?

Aufgabe 4

Die Höhe eines Gebäudes wird auf 18,5 m bis 19,1 m geschätzt. Wie groß sind die absoluten und relativen Fehler von dieser Schätzung?

Aufgabe 5

Das Volumen eines Tanks wird auf 357,5 l geschätzt mit einem Fehler von einem halben Liter. Wie groß ist der relative Fehler dieser Schätzung?

Aufgabe 6

Dennis wird diesen Monat einen Bonus von 150 € erhalten, der zu seinem Gehalt von 1.200 € hinzukommt. Dennis errechnet, dass dieser Bonus eine Erhöhung seines Einkommens um 15 % bedeutet. Welchen Fehler macht er bei seiner Rechnung?

Aufgabe 7

Eine Schalenwaage hat eine maximale Genauigkeit von $\frac{1}{4}$ kg. Eine bestimmte Menge Walnüsse wird auf dieser Waage gewogen und es wird ein Wert von 6,25 kg angezeigt. Wie hoch ist das tatsächliche Gewicht der Walnüsse? Wie hoch ist der prozentuale Fehler?

Exemplarische Lösungen:

Aufgabe 1

Um einen Betragsstrich zu schreiben, muss die Abs-Funktion des Taschenrechners genutzt werden. Die Betragstiche setzt man mit $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{[]}}$.

Der **absolute** Fehler ist:

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{[]}} \boxed{1} \boxed{6} \boxed{,} \boxed{5} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{5} \boxed{=}$

$|16,5 - 15|$
 $\frac{3}{2}$

mit $\boxed{\text{S} \rightarrow \text{D}}$ kann man sich eine Dezimalzahl anzeigen lassen

$|16,5 - 15|$
 1,5

Dies wird als 1 Minute und 30 Sekunden interpretiert. Dieses Ergebnis kann in Minuten und Sekunden ausgedrückt werden, in dem man $\boxed{\text{D} \rightarrow \text{M}}$ drückt.

$|16,5 - 15|$
 1° 30' 0"

Der **relative** Fehler wird wie folgt berechnet:

$\boxed{\text{Ans}} \boxed{\div} \boxed{1} \boxed{6} \boxed{,} \boxed{5} \boxed{=}$

$\text{Ans} \div 16,5$
 0,09090909091

Solltet ihr einen Bruch angezeigt bekommen, könnt ihr das wieder mit $\boxed{\text{S} \rightarrow \text{D}}$ in eine Dezimalzahl ändern.

Dieses Ergebnis wird wie folgt in Prozent ausgedrückt:

$\text{Ans} \times 100$
 9,090909091

$\boxed{\text{Ans}} \boxed{\times} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{=}$

Aufgabe 2

Die maximale Anzahl von Ameisen ist:

$2000 \times 1,15$

2000 \times 1,15
2300

Die minimale Anzahl ist:

$2000 \times (1 - 0,15)$

2000 \times (1-0,15)
1700

Infolgedessen befinden sich zwischen 1.700 und 2.300 Ameisen im Ameisenhaufen.

Aufgabe 3

Der absolute Fehler, der gemacht wurde, ist:

$|357000 - 385000|$

|357000-385000|
28000

Die Berechnung des relativen Fehlers sieht folgendermaßen aus:

$\frac{28000}{357000}$

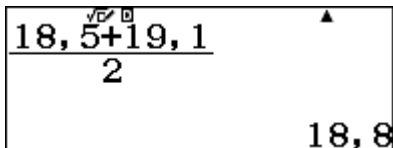
Ans \div 357000
0,07843137255

Aufgabe 3

Der Mittelwert der Schätzung kann als Grundlage für die Ermittlung des absoluten und des relativen Fehlers betrachtet werden.

Der Mittelwert errechnet sich wie folgt:

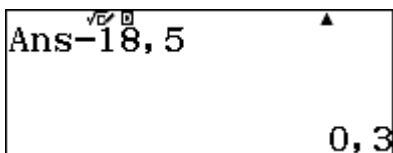
$\boxed{1} \boxed{8} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{9} \boxed{=} \boxed{2} \boxed{=}$



$$\frac{18,5 + 19,1}{2} = 18,8$$

Der absolute Fehler ist:

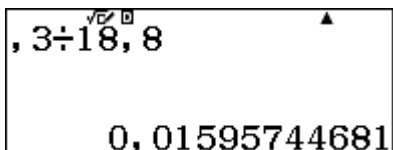
$\boxed{-} \boxed{1} \boxed{8} \boxed{-} \boxed{5} \boxed{=}$



$$\text{Ans} - 18,5 = 0,3$$

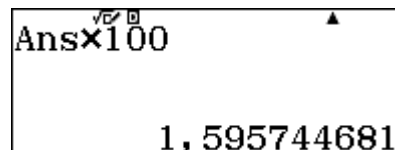
Der relative Fehler ist:

$\boxed{0} \boxed{,} \boxed{3} \boxed{\div} \boxed{1} \boxed{8} \boxed{,} \boxed{8} \boxed{=}$



$$0,3 \div 18,8 = 0,01595744681$$

Prozent: →



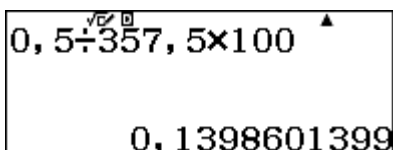
$$\text{Ans} \times 100 = 1,595744681$$

Der relative Fehler beträgt somit in etwa 1,6%.

Aufgabe 5

Der absolute Fehler beträgt 0,5 l und der relative Fehler, ausgedrückt in Prozent, wird wie folgt berechnet:

$\boxed{0} \boxed{,} \boxed{5} \boxed{\div} \boxed{3} \boxed{5} \boxed{7} \boxed{,} \boxed{5} \boxed{\times} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{=}$



$$0,5 \div 357,5 \times 100 = 0,1398601399$$

Der relative Fehler beträgt gerundet auf 2 Nachkommastellen 0,14%.

Aufgabe 6

Die tatsächliche Erhöhung beträgt in Prozent:

1 5 0 ÷ 1 2 0 0 × 1 0 0 =

$$150 \div 1200 \times 100 = 12,5$$

Der von Dennis begangene Fehler, kann in absoluten Zahlen wie folgt berechnet werden:

1 2 0 0 × 1,15 - 1 3 5 0 =

$$1200 \times 1,15 - 1350 = 30$$

Dennis würde mit einer Erhöhung seines Einkommens von 15% 30€ mehr erhalten im Vergleich zu den tatsächlichen 12,5%.

Der relative Fehler berechnet sich wie folgt:

1 5 ÷ 1 2,5 =

$$15 \div 12,5 = 1,2$$

Das bedeutet, dass Dennis 120 % des tatsächlich erhaltenen Bonus berechnet hat, also einen relativen Fehler von 20 % gemacht hat.

Aufgabe 7

Die Genauigkeit der Waage beträgt 0,25 kg, so dass das Gewicht der Nüsse zwischen den folgenden Werten liegen dürfte:

6,25 - 0,25 =

6,25 - 0,25 ▲
6

6,25 + 0,25 =

6,25 + 0,25 ▲
6,5

Der relative Fehler der Waage, ausgedrückt in %, beträgt:

0,25 ÷ 6,25 × 100 =

0,25 ÷ 6,25 × 100 ▲
4

Das heißt, der relative Fehler beträgt 4%.