SRDP 08.05.2025 – Mathematik – **AHS**

Lösungsmöglichkeiten mit dem ClassPad II

Einführung

Das ClassPad beweist auch bei dieser Matura, dass es ein sehr mächtiges Intrument zur Lösung von mathematischen Aufgabenstellungen und vielseitig einsetzbar ist. Zahlreiche Beispiele können direkt gelöst werden.

Das Aufgabenheft sowie die Lösungen sind unter https://www.matura.gv.at/downloads als pdf-Dokument abrufbar.

Ich werde jeder Aufgabe eine Seite widmen und die jeweiligen technologie-relevanten Beispiele behandeln. Ich rechne zur Veranschaulichung der Möglichkeiten des ClassPads auch einige Beispiele mit Technologieeinsatz, die auch ohne diesen möglich gewesen wären – just for fun. Diese sind mit einem Stern gekennzeichnet.

Sollte nichts angegeben sein, so wird die Aufgabe in der 

-Anwendung ausgeführt.

Auffällig war, dass alles in der Main-Anwendung gerechnet werden konnte und die weiteren Anwendungen nicht (wirklich) zum Einsatz gekommen sind.

Los geht´s!

Aufgabe 1 – Terme (✶)

Terme

Für die von null verschiedenen ganzen Zahlen a und b gilt: $a = -4 \cdot b$

Aufgabenstellung:

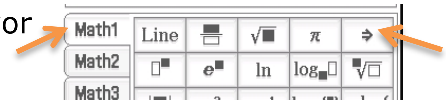
Kreuzen Sie die beiden Terme an, die in jedem Fall eine natürliche Zahl ergeben. *[2 aus 5]*

$a - b$	☐
$\sqrt{-\frac{a}{b}}$	☐
$a + b$	☐
$(-a - b)^2$	☐
$a \cdot b$	☐

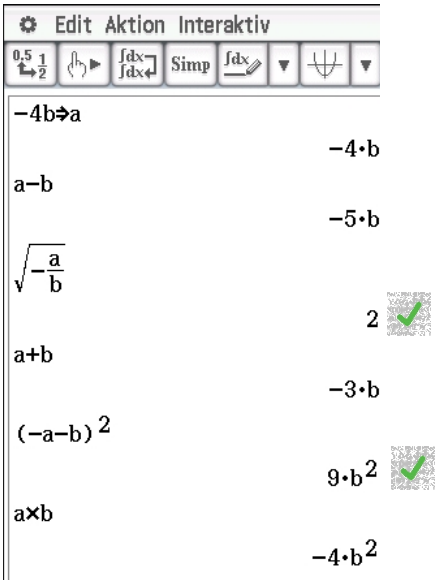
Lösung

Hier gibt es mehrere Möglichkeiten:

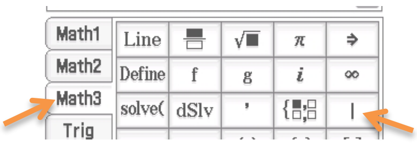
[1] Wir nehmen in der ersten Zeile eine Zuordnung vor und tippen anschließend die Rechnungen ein.

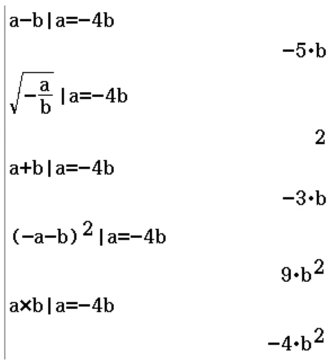


Man kann schön sehen, dass die 2. und 4. Zeile die richtige Lösung ergeben.



[2] Man nimmt den Bedingungsoperator und nutzt dabei die Befehle *Kopieren* und *Einfügen* im Menüpunkt Edit in der Menüleiste.





Aufgabe 3 – Gleichungen mit Parameter (✶)

Gleichung mit Parameter

Gegeben ist die Gleichung $a \cdot x - 5 = 10$ in $x \in \mathbb{R}$ mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Wenn ______①______ ist, dann hat die Gleichung ______②______.

①	
$a > 0$	☐
$a = 0$	☐
$a < 0$	☐

②	
keine reelle Lösung	☐
zwei reelle Lösungen	☐
unendlich viele Lösungen	☐

Lösung

Wir berechnen mit dem *solve*-Befehl die Gleichung und schauen uns anschließend die Lösung an.

Anmerkung: Der *solve*-Befehl findet sich in der Menüleiste unter Aktion/Weiterführend – *solve* oder unter Keyboard bei "Math3".

```
solve(ax−5=10,x
```

$$\left\{x=\frac{15}{a}\right\}$$

Man erkennt, dass x nicht definiert ist, wenn a=0 gilt. Zwei oder unendlich viele Lösungen kann es nicht geben, weil x als Bruchzahl eindeutig ist. Somit ergibt sich als Lösung:

①	
$a > 0$	☐
$a = 0$	☑
$a < 0$	☐

②	
keine reelle Lösung	☑
zwei reelle Lösungen	☐
unendlich viele Lösungen	☐

Aufgabe 4 – Punkte auf einer Geraden (✶)

Punkte auf einer Geraden

Die Gerade g in $\mathbb{R}^3$ verläuft durch die Punkte $P = (-1|0|3)$ und $Q = (3|-1|2)$.
Der Punkt A ist ein von P und von Q verschiedener Punkt auf g.

Aufgabenstellung:

Geben Sie mögliche Koordinaten von A an.

$A = (\_\_\_\_\_\_ | \_\_\_\_\_\_ | \_\_\_\_\_\_)$

Lösung (sehr ausführlich)

Wir geben die Parameterform der Geraden ein und weisen dann dem Parameter einen bestimmten Wert zu. Ich habe mich hier für den Wert t=2, wie er auch für die Musterlösung verwendet wird, entschieden.

Vektoren werden über Keyboard unter "Math2" und [▤] eingegeben, wobei durch nochmaliges Drücken auf [▤] eine Dimension hinzugefügt wird.

Parameterform bei zwei Punkten P und Q → g=P+t·(Q-P).

$$\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix} \Rightarrow P \qquad \begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix} \Rightarrow Q \qquad \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$P-Q \qquad \begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix}$$

→

$$P-Q \qquad \begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$P-t\times(P-Q) \qquad \begin{bmatrix}4\cdot t-1\\-t\\-t+3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4\cdot t-1\\-t\\-t+3\end{bmatrix}\Big| t=2 \qquad \begin{bmatrix}7\\-2\\1\end{bmatrix}$$

A=(7|-2|1)

Aufgabe 8 – Lineare Funktion

Von der linearen Funktion *f* sind folgende Eigenschaften bekannt:

- Die Funktion *f* hat an der Stelle –4 eine Nullstelle.
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x + 2) = f(x) - 6$

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Funktionsgleichung von *f* auf.

$f(x) =$ ______________________________

Lösung

Dieses Beispiel könnten wir direkt mit einem Gleichungssystem lösen.

[1] Wir definieren die Funktion f(x)=kx+d über Keyboard und den Befehl Define unter "Math3".

[2] Wir erstellen weiters unter "Math1" mit ein Gleichungssystem und lösen es nach k und d auf.

```
Define f(x)=kx+d
                                done
{0=f(-4)
{f(x+2)=f(x)-6 |k,d
                      {k=-3,d=-12}
```

f(x)=-3x-12

Aufgabe 10 – Argument einer quadratischen Funktion

Argument einer quadratischen Funktion

Gegeben ist die quadratische Funktion *f* mit $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$.

In der nachstehenden Tabelle sind Wertepaare von *f* angegeben, wobei $r > 0$ ist.

x	-1	0	r
$f(x)$	5	1	1

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie *r*.

Lösung

Wir ermitteln in einem ersten Schritt die Funktionsgleichung und berechnen anschließend mit dem *solve*-Befehl den gewünschten Wert. (Anm.: Dazu definieren wir die ermittelte Gesamtfunktion mit g(x), da wir f(x) schon für die Ermittlung der beiden Parameter b und c verwendet haben.)

Die Eingabe wird analog zu Aufgabe 8 im ClassPad durchgeführt.

Define $f(x)=\frac{2}{3}x^\wedge 2+bx+c$

done

$\begin{cases} f(-1)=5 \\ f(0)=1 \end{cases} \Big| b, c$

$\left\{b=-\frac{10}{3}, c=1\right\}$

Define $g(x)=\frac{2}{3}x^\wedge 2+-\frac{10}{3}x+1$

done

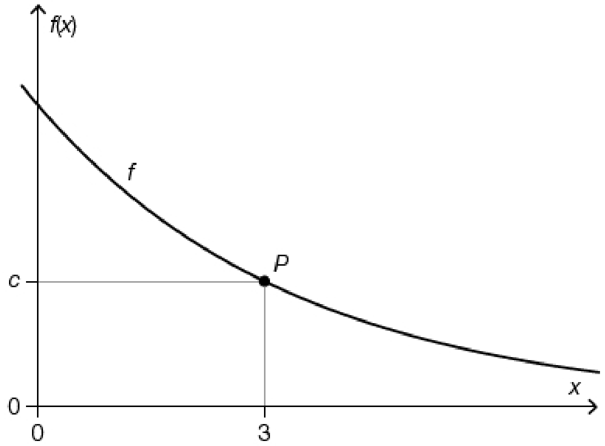
solve(g(r)=1, r

{r=0, r=5}

r=5 (da r=0 bereits in der Tabelle vorkommt)

Aufgabe 11 – Exponentialfunktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ dargestellt. Der Punkt $P = (3\,|\,c)$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ liegt auf dem Graphen von f.



Aufgabenstellung:

Vervollständigen Sie unter Verwendung von a und c die nachstehende Gleichung der Funktion f.

$$f(x) = a \cdot \left(\boxed{}\right)^x$$

Lösung

Wir definieren in einem ersten Schritt die Funktionsgleichung und berechnen anschließend mit dem *solve*-Befehl den gewünschten Wert.

Define f(x)=a×b^x

done

solve(f(3)=c, b

$$\left\{b=\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$$\rightarrow\ b=\sqrt[3]{\frac{c}{a}}$$

Aufgabe 12 – Allgemeine Sinusfunktionen

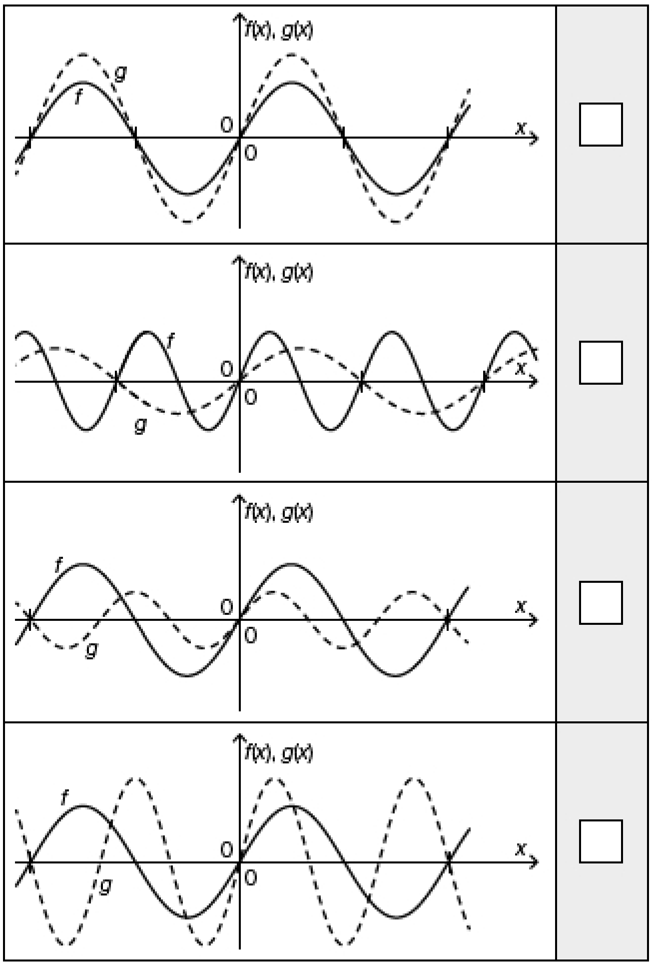
Für zwei Sinusfunktionen f und g gilt:

$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$
$g(x) = c \cdot \sin(d \cdot x)$ mit $c, d \in \mathbb{R}^+$

In den unten stehenden Abbildungen sind Graphen von f und g für bestimmte Werte von a, b, c und d dargestellt. Auf den x-Achsen sind jeweils die gemeinsamen Nullstellen im dargestellten Bereich markiert.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Graphenpaaren jeweils die zutreffenden Bedingungen aus A bis F zu.



A	$a > c,\ b < d$
B	$a < c,\ b = d$
C	$a < c,\ b < d$
D	$a = c,\ b > d$
E	$a > c,\ b > d$
F	$a < c,\ b > d$

Lösungshinweis

In der Grafik & Tabelle -Anwendung kann man je zwei Musterfunktionen eingeben und dann die Graphen vergleichen. Nicht vergessen: Bogenmaß 2π eingeben!

Aufgabe 18 – Beschleunigungsphase

Ein fahrendes Auto hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Geschwindigkeit von 15 m/s.

Für die Beschleunigung a des Autos zum Zeitpunkt t gilt: $a(t) = -0{,}1 \cdot t^2 + t$
(t in s, $a(t)$ in m/s²)

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Autos (in m/s) zum Zeitpunkt $t = 5$ s.

Lösung

Wir definieren in einem ersten Schritt die Beschleunigungsfunktion a(t) und berechnen mit dem Integral die Geschwindigkeitsfunktion v(t). Anschließend berechnen wir die Konstante c mit dem *solve*-Befehl (was aber auch ohne ClassPad klar ersichtlich ist, dass c=15). Dann setzen wir mit dem Bedingungsoperator noch t=5 ein und erhalten das Ergebnis in m/s.

Define a(t)=-0.1t^2+t

done

$$\int_{\square}^{\square} a(t)\,dt$$

$$\frac{-(t^3-15\cdot t^2)}{30}$$

Define $v(t)=\dfrac{-(t^3-15\cdot t^2)}{30}+c$

done

solve(v(0)=15, c

{c=15}

$$\frac{-(t^3-15\cdot t^2)}{30}+15 \mid t=5$$

23.33333333

v(5) = 23,3 m/s

Aufgabe 25 – Garten (Teil 2)

b) In einem Garten wurde eine Fichte gepflanzt. Die Höhe dieser Fichte in Abhängigkeit von der Zeit t kann durch die Funktion h modelliert werden.

$$h(t) = \frac{35}{1 + 7 \cdot e^{-0{,}06 \cdot t}} - 4$$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für den Zeitpunkt der Pflanzung
$h(t)$ ... Höhe der Fichte zum Zeitpunkt t in m

Die Höhe der Fichte nähert sich gemäß diesem Modell für unbeschränkt größer werdende t beliebig nahe dem Wert G an.

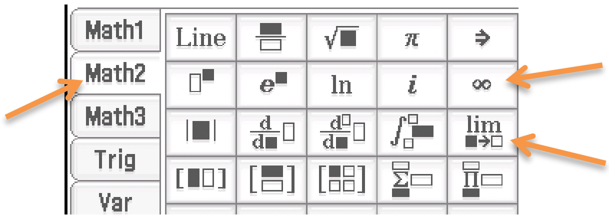
Es gilt: $G = \lim\limits_{t \to \infty} h(t)$

1) Geben Sie G an.

$G =$ __________ m *[0/1 P.]*

Lösung

Wir geben den Funktionsterm in das ClassPad ein und berechnen den Grenzwert.



$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{35}{1+7 \times e^{-0.06t}} - 4 \right)$$

31

G = 31 m

Aufgabe 26 – Wirkstoffe (Teil 2)

b) Frau Egger bekommt zum Zeitpunkt $t = 0$ den Wirkstoff B verabreicht.
Die reelle Funktion m_B mit $m_B(t) = 1{,}019 \cdot t \cdot e^{-0{,}025 \cdot t}$ beschreibt modellhaft die Menge des Wirkstoffs B in Frau Eggers Körper in Abhängigkeit von der Zeit (t in min, $m_B(t)$ in mg).

Ab dem Zeitpunkt $t = 240$ min kann die Menge des Wirkstoffs B in Frau Eggers Körper in Abhängigkeit von der Zeit t modellhaft durch die lineare Funktion f beschrieben werden (t in min, $f(t)$ in mg).

Die Funktionen m_B und f haben an der Stelle $t = 240$ min den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung.

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von f auf.

$f(t) =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

Lösung

Define mb(t)=1.019×t×e^(−0.

done

mb(240)

0.6062036323

$\frac{d}{dt}(\mathrm{mb}(t))$

$-\frac{2.5E-5\cdot(1019\cdot t-40760)}{2.718281828^{0.025\cdot t}}$

$-\frac{2.5E-5\cdot(1019\cdot t-40760)}{2.718281828^{0.025\cdot t}} \mid t=$

−0.01262924235

Define f(t)=−0.012629×t+d

done

solve(f(240)=0.60620,d

{d=3.63716}

[1] Wir definieren mb(*t*). Nutze für die Variable *t* die Zweitbelegung mit [Shift] [( ].

[2] Wir berechnen mb(240) [=f(240)] = 0,6062…

[3] Wir leiten die Funktion mb(t) ab. [Math2]

[4] Wir setzen in der Ableitung mit dem Bedingungsoperator für t=240 ein und erhalten die Steigung k von f(t)=k·t+d

[5] Wir definieren die Funktion f(t) mit dem bereits bekannten k.

[6] Wir lösen die Gleichung f(240)=0,60620 nach d und erhalten d.

f(t) = -0,0126t+3,6372

Aufgabe 27 – Mount-Everest-Marathon (Teil 2)

Bei diesem Beispiel genügt im Wesentlichen die Taschenrechner-Funktion des ClassPads. Hier könnte man den Umrechenbefehl *toDMS* verwenden.

toDMS: findet sich bei "Math1" und rechnet eine Kommazahl in entweder Grad, Minuten und Sekunden oder Stunden, Minuten und Sekunden um.

b) Die Marathonstrecke führt vom Startpunkt im Basislager bis zum Endpunkt in Namche. An bestimmten Streckenpunkten werden die bis dahin benötigten Laufzeiten einer bestimmten Läuferin ermittelt (siehe nachstehende Tabelle).

Name des Streckenpunkts	bis dahin zurückgelegte Strecke in km	bis dahin benötigte Laufzeit in h
Basislager	0	0
Dingboche	17,3	t_1
Tengboche	32,6	t_2
Namche	42,195	t_3

Unter Verwendung der nachstehenden Formel kann mithilfe der Zeit t_1 die zu erwartende Laufzeit t_3 für den gesamten Marathon näherungsweise berechnet werden. Es gilt:

$$t_3 = t_1 \cdot \left(\frac{42{,}195}{17{,}3}\right)^k$$

t_3 ... zu erwartende Laufzeit für den gesamten Marathon in h
t_1 ... Laufzeit bis zum Streckenpunkt Dingboche in h
$k > 0$ ... Ermüdungsfaktor

Für diese Läuferin gilt: $k = 1{,}073$

Die Läuferin startet um 7 Uhr (07:00:00) im Basislager. Um 8:30 Uhr (08:30:00) erreicht sie den Streckenpunkt Dingboche. Gemäß dem obigen Modell erreicht die Läuferin das Ziel in Namche um eine bestimmte Uhrzeit.

1) Tragen Sie für diese Uhrzeit die Stunden und Minuten in den nachstehenden Kästchen ein.

Uhrzeit: ☐ : ☐ : 16 *[0/1 P.]*

Lösung

$$1.5\times\left(\frac{42.195}{17.3}\right)^{1.073}$$

3.904566591

toDMS(3.904566591

3°54'16.4397276"

3 Stunden, 54 Minuten, 16,4 Sekunden   Uhrzeit: 10:54:16

Aufgabe 28 – Schokolade (Teil 2)

a) Eine neue Schokoladesorte besteht aus Vollmilchschokolade und weißer Schokolade.

Die Zutaten von je 100 g Vollmilchschokolade und weißer Schokolade sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Zucker	Kakao	Milchpulver	Sonstiges
Vollmilchschokolade	35 g	42 g	21 g	2 g
weiße Schokolade	38 g	30 g	30 g	2 g

Der Anteil an Kakao in der neuen Schokoladesorte beträgt 35 %.

Für die Herstellung einer 300-g-Tafel der neuen Schokoladesorte benötigt man *v* Gramm Vollmilchschokolade und *w* Gramm weiße Schokolade.

1) Berechnen Sie *v* und *w*. *[0/1 P.]*

Lösung

Wir erstellen (wie bei Aufgabe 8 angegeben) ein Gleichungssystem und lösen nach v und w.

$$\begin{cases} v+w=300 \\ 0.42\times v+0.3\times w=0.35\times 300 \end{cases}\Bigg|_{v,\,w}$$

$$\{v=125,\, w=175\}$$

b) Geschmolzene Schokolade wird in einer Maschine für die Weiterverarbeitung auf die richtige Temperatur gebracht.
Die Funktion T: [0; 1,5] → $\mathbb{R}^+$ beschreibt dabei modellhaft die Temperatur der Schokolade in Abhängigkeit von der Zeit.

Es gilt:

$$T(t) = -\frac{304}{27} \cdot t^5 + \frac{392}{27} \cdot t^4 + \frac{1100}{27} \cdot t^3 - 62 \cdot t^2 + 45$$

t ... Zeit in h
$T(t)$ ... Temperatur der Schokolade zum Zeitpunkt t in °C

Bis zum Zeitpunkt t_1 nimmt die Temperatur der Schokolade in der Maschine ab. Ab diesem Zeitpunkt nimmt die Temperatur wieder zu.

1) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Temperatur der Schokolade im Zeitintervall [0; t_1]. Geben Sie das Ergebnis in °C/min an. *[0/1 P.]*

Lösung

Define $T(t)=-\frac{304}{27}t^5+\frac{392}{27}t^4+\frac{1100}{27}t^3-62t^2+45$

done

Define $T1(t)=\frac{d}{dt}(T(t))$

done

solve(T1(t)=0, t

{t=0, t=1, t=−1.468421053, t=1.5}

[1] Wir definieren die Funktion T(t)

[2] Wir bilden unter Math2 die erste Ableitung von T(t) und definieren die Ableitungsfunktion mit T1(t)

[3] Wir ermitteln den Zeitpunkt t_1. Dies ist eine Extremstelle (Minimum) von T(t). Es kommen 4 Werte für t_1 in Frage. Den negativen Wert können wir ausschließen. Wir können nun die Überprüfung mit der 2. Ableitung durchführen, oder die Funktion im Intervall in der 

-Anwendung ansehen und erkennen, dass t=1 die gesuchte Stelle ist.

[4] Wir bilden den Differenzenquotienten und erhalten -18°C/h.

[5] Wir berechnen die Abkühlung pro Minute.

$\frac{T(1)-T(0)}{1-0}$

−18

−18/60

−0.3

Die mittlere Änderungsrate im Zeitintervall [0,t_1] beträgt -0,3°/min.