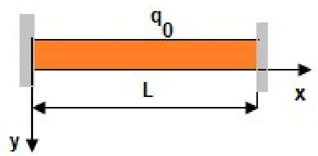
Biegelinie eines beidseitig eingespannten Trägers

Einführung



Belastet man einen beidseitig eingespannten Träger mit einer konstanten Streckenlast q_0 so wird die Trägerachse durchgebogen. Die Durchbiegung lässt sich formelmäßig durch die Biegelinie y mit $y(x) = \frac{q_0}{E \cdot I} \cdot \frac{L^4}{24} \cdot \frac{x^2}{L^2} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$ beschreiben, wobei $E \cdot I$ die Biegesteifigkeit und L die Trägerlänge ist.

Aufgabe

a) Vereinfache die Gleichung der Biegelinie, wenn für L = 6,00 m und $\frac{q_0}{E \cdot I} = 5 \cdot 10^{-3}\ m^{-3}$ gelten.

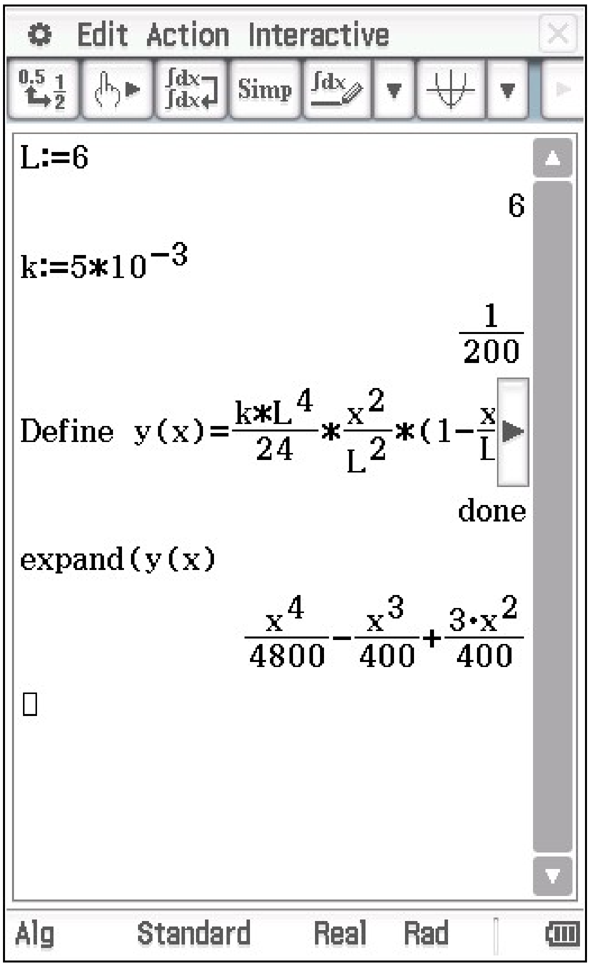
b) Die Biegelinie ist eine Polynomfunktion 4. Grades $y(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$. Ermittle die Koeffizienten a bis e.

c) Bestimme die Nullstellen, Extremwerte sowie die Wendepunkte.

d) Stelle die Biegelinie grafisch dar und ermittle daraus die maximale Durchbiegung.

Exemplarische Lösung

a)



Definition der Länge L = 6 m.

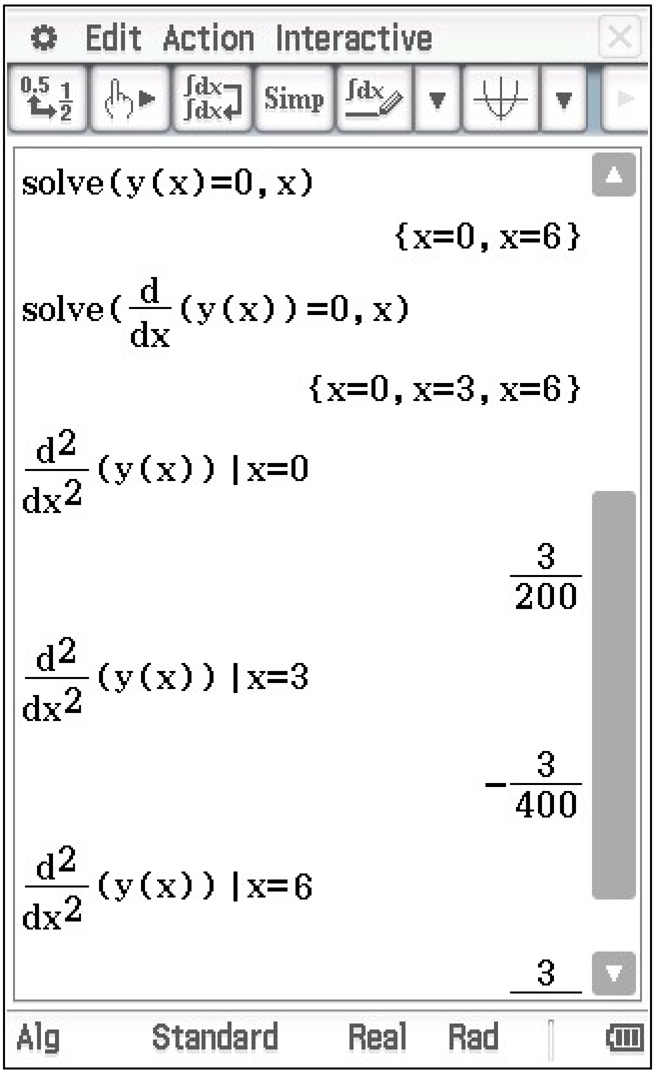
Ersetzung von $\frac{q_0}{E \cdot I}$ durch $k=5 \cdot 10^{-3}\ m^{-3}$

Mit *define* wird die Gleichung der Biegelinie unter y(x) gespeichert.

Mit *expand* wird die Gleichung der Biegelinie vereinfacht.

b) Durch einen Koeffizientenvergleich erhält man: $a = \frac{1}{4800}$; $b = -\frac{1}{400}$; $c = \frac{3}{400}$; $d = e = 0$

c)



Nullstellen:
$y(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 6$

Extremstellen:

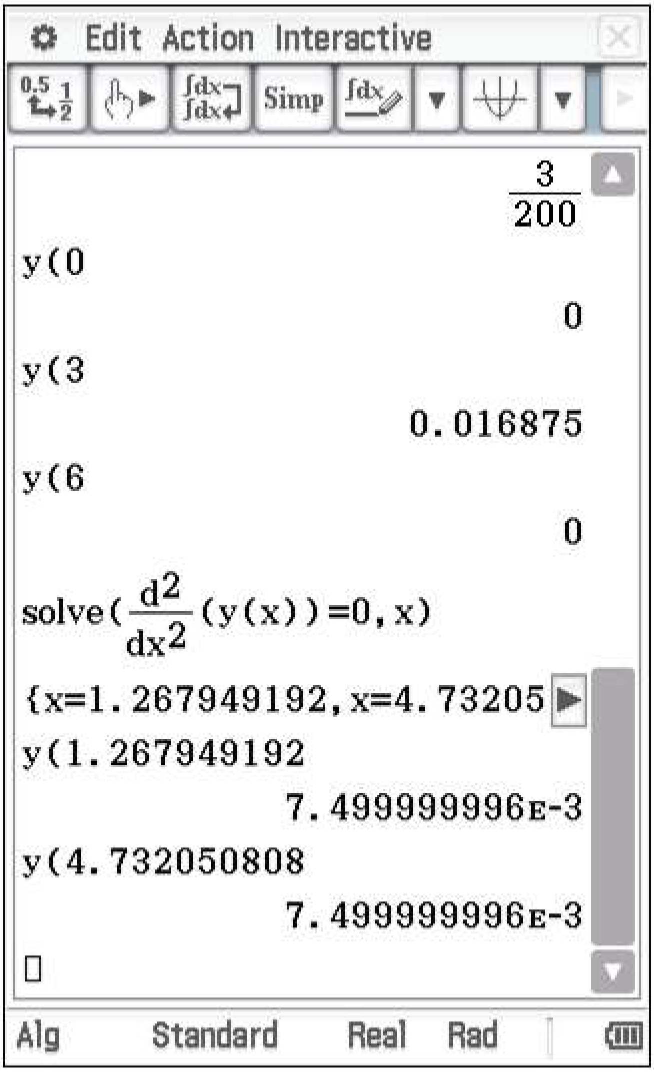
$y`(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 3;\ x_3 = 6$

Mit der zweiten Ableitung erfolgt die Überprüfung, ob es sich um Extremstellen handelt.

$y''(0) = \frac{3}{200} > 0 \Longrightarrow$ relatives Minimum

$y''(3) = -\frac{3}{400} < 0 \Longrightarrow$ relatives Maximum

$y''(6) = \frac{3}{200} > 0 \Longrightarrow$ relatives Minimum



Berechnung der zugehörigen y-Werte:

$E_1 = (0/0)$ Tiefpunkt

$E_2 = (3/\ 0{,}017)$ Hochpunkt

$E_3 = (6/\ 0)$ Tiefpunkt

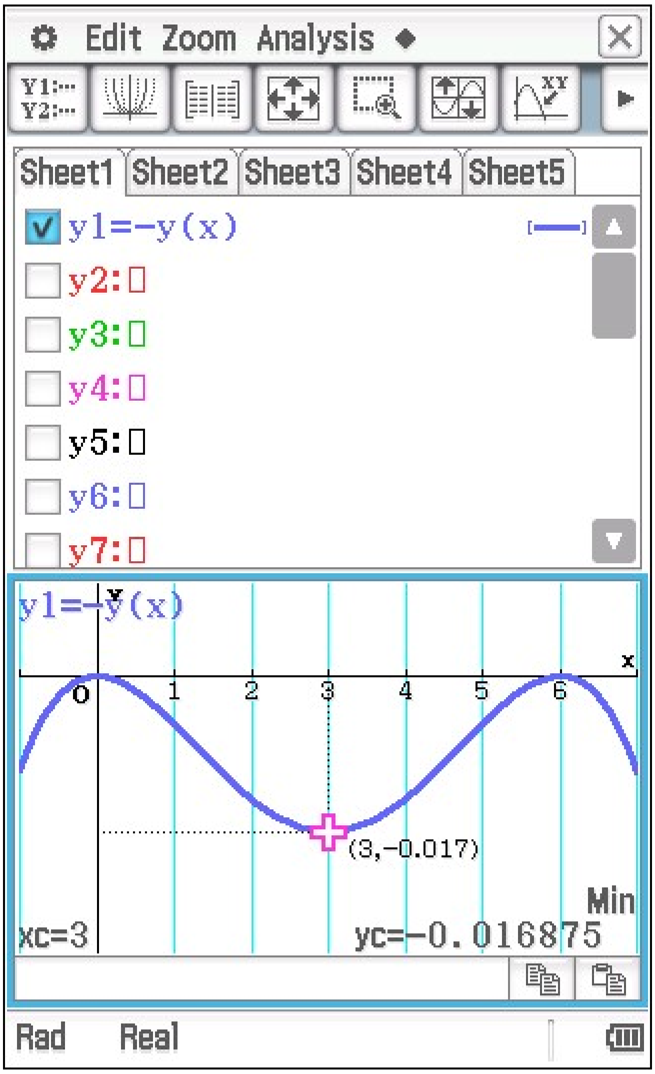
Wendestellen:

$y''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1{,}27;\ x_2 = 4{,}73$

$W_1 = (1{,}27\ /\ 0{,}0075);$

$W_2 = (4{,}73/0{,}0075)$

d)



Um eine realistische Darstellung der Biegelinie zu erhalten wird im y Editor bei y1= −y(x) eingegeben.

Der Definitionsbereich der Biegelinie ist das abgeschlossene Intervall [0m; 6m].

Die y-Koordinate des Tiefpunktes entspricht der maximalen Durchbiegung in m: 0,017m = 17 mm

Literaturhinweis: Ingenieur-Mathematik 3 Timischl, Kaiser; Verlag E.DORNER