SRDP 07.05.2024 – Angewandte Mathematik – **HAK**

Technologische Lösungsmöglichkeiten mit dem ClassPad II

Einführung

Auch in diesem Jahr ist das ClassPad wieder ein bewährter Weggefährte zur Lösung der Maturaaufgaben der Handelsakademie. Ebenfalls eignet es sich bestens zur Überprüfung der gefundenen Lösungen. Dies könnten meiner Meinung nach insbesondere die Maturantinnen und Maturanten stärker ins Kalkül ziehen.

Das Aufgabenheft sowie die Lösungen sind unter https://www.matura.gv.at/downloads als pdf-Dokument abrufbar.

Ich werde jeder Aufgabe eine Seite widmen und die jeweiligen technologie-relevanten Beispiele behandeln. Sollte nichts angegeben sein, so wird die Aufgabe in der 

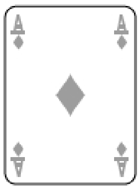
-Anwendung ausgeführt. Auch ein paar Praxistipps dürfen nicht fehlen ;-).

Los geht´s!

Aufgabe 1 – Karo

Karo

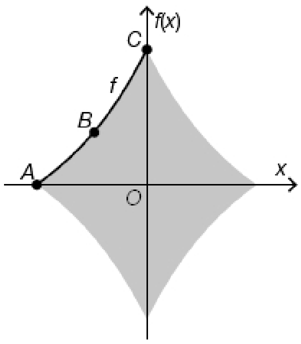
Das Karo ist ein Symbol, das zum Beispiel auf Spielkarten vorkommt.



a) In der nebenstehenden Abbildung ist ein Karo als graue Fläche dargestellt. Die Begrenzungslinie der Fläche zwischen den Punkten A und C wird mithilfe der Funktion f modelliert.

Die Funktion f ist eine Polynomfunktion 3. Grades mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$.

Der Graph von f verläuft durch die Punkte $A = (-4{,}2|0)$, $B = (-2|2)$ und $C = (0|5{,}2)$.
Die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt B beträgt 1,2.

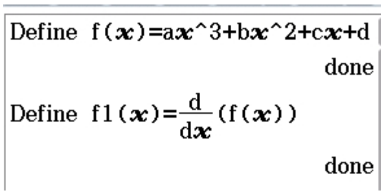


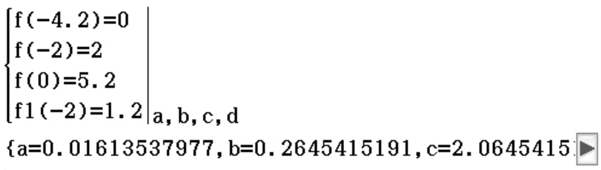
1) Erstellen Sie mithilfe dieser Informationen ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d. *[0/½/1 P.]*

2) Berechnen Sie a, b, c und d. *[0/1 P.]*

[1] Öffne mit Keyboard die Softwaretastatur und definiere die Funktion f(x). Definiere die erste Ableitung f1(x) und verwende dabei im Register Math2 den Befehl $\frac{d}{d\square}$. Nutze zur Eingabe von f(x) gemütlich die Drag & Drop-Funktion des ClassPads.

[2] Erstelle unter Math1 durch mehrmaliges Tippen auf ein Gleichungssystem mit 4 Zeilen. Gib die Werte ein und löse dieses nach a,b,c,d auf.

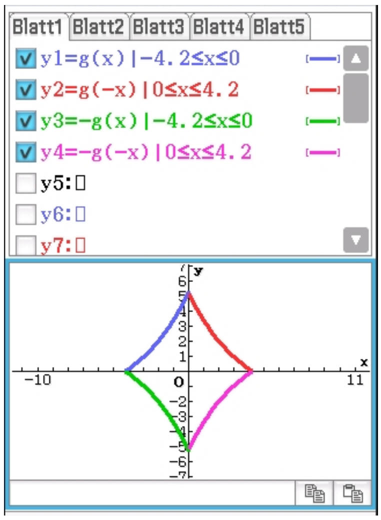




Antwort 2): a=0,0161, b=0,2645, c=2,0645, d = 5,2

Man kann auch eine schöne Probe durchführen, indem man in der Grafik& und Tabelle-Anwendung die Funktion für die jeweiligen Abschnitte mit dem Bedingungsoperator eingibt.

Ich habe die Grafikfunktion in der Main-Anwendung als g(x) definiert. g(x)=0,0161x³+0,2645x²+2,0645x+5,2



Aufgabe 3 – Tomaten

d) Für Saatgut von Tomaten einer bestimmten Sorte gilt: Jedes einzelne Korn dieses Saatguts keimt unabhängig von den anderen Körnern mit einer Wahrscheinlichkeit von 93 %.

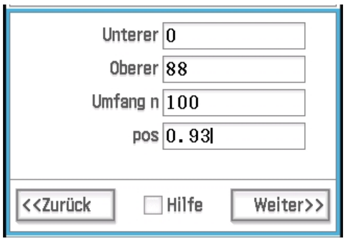
1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Zufallsstichprobe von 100 Körnern dieses Saatguts höchstens 88 Körner keimen. *[0/1 P.]*

Lösung

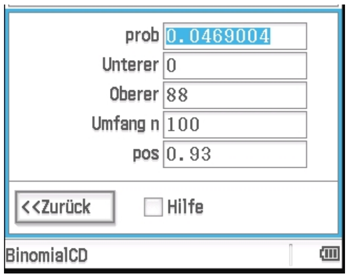
Öffne die 

-Anwendung und stelle über die Menüleiste *Calc/Verteilung* bei Verteilung "*Binom.Vert.-fkt.*" ein. Gib anschließend die Werte in der Maske ein und lies das Ergebnis direkt ab.

→



→



Antwort: Die Wahrscheinlichkeit beträgt 4,7%.

Aufgabe 5 – Speiseeis

a) Bei einem Eisstand wird Speiseeis in zwei Portionsgrößen verkauft: Mini-Portionen mit 1 Eiskugel und Normal-Portionen mit 3 Eiskugeln.

Eine Mini-Portion kostet € 1,50.
Eine Normal-Portion kostet € 4.

An einem bestimmten Tag werden € 1.020 eingenommen und insgesamt 720 Eiskugeln verkauft.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Anzahl x der verkauften Mini-Portionen und der Anzahl y der verkauften Normal-Portionen. *[0/½/1 P.]*

Lösung

Erstelle unter Math1 durch Tippen auf ein Gleichungssystem mit 2 Zeilen. Gib die Werte ein und löse dieses nach *x* und *y* auf.

$$\begin{cases} x+3y=720 \\ 1.5x+4y=1020 \end{cases}\Bigg|_{x,\,y}$$

$$\{x=360,\ y=120\}$$

Antwort: Es wurden 360 Mini-Portionen und 120 Normal-Portionen verkauft.

b) Ein Becher mit Speiseeis wird aus der Kühlvitrine entnommen. Die Temperatur des Speiseeises in Abhängigkeit von der Zeit kann modellhaft durch die Funktion T beschrieben werden.

$T(t) = -35 \cdot e^{-0{,}03 \cdot t} + 25$

t ... Zeit in min mit $t = 0$ für den Zeitpunkt der Entnahme aus der Kühlvitrine
$T(t)$ ... Temperatur des Speiseeises zur Zeit t in °C

1) Tragen Sie im nachstehenden Satz die fehlende Zahl ein.

Die Temperatur des Speiseeises bei der Entnahme aus der Kühlvitrine beträgt ________ °C.
[0/1 P.]

Das gefrorene Speiseeis schmilzt ab einer Temperatur von 0 °C.

2) Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, ab dem das gefrorene Speiseeis schmilzt. *[0/1 P.]*

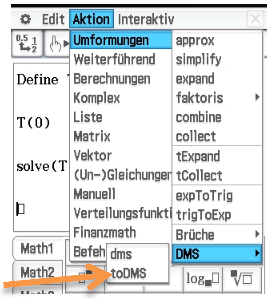
Lösung

[1] Definiere T(***t***). Nutze für die Variable ***t*** die Zweitbelegung mit Shift (.

[2] (b1) Berechne T(0)

[3] (b2) Berechne die Nullstelle von T(***t***)

[4] (Fleissaufgabe) Wandle das Ergebnis von [3] in Minuten und Sekunden um.

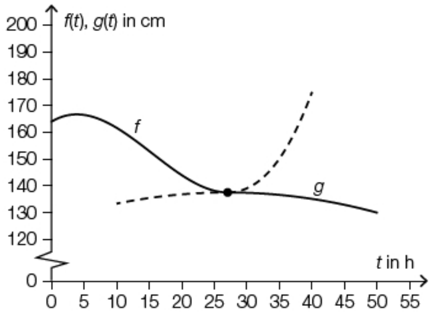



```
Define T(t)=-35×e^(-0.03t)+25
                              done
T(0)
                               -10
solve(T(t)=0,t
                     {t=11.21574122}
toDMS({11.21574122}
               { 11°12'56.668392" }
```

Antwort:
b1) -10°
b2) Nach 11 Minuten 13 Sekunden

Aufgabe 6 – Wasserstand

Zur Beschreibung des zeitlichen Verlaufs des gemessenen Wasserstands eines Flusses werden die Polynomfunktion 3. Grades *f* und die quadratische Funktion *g* verwendet (siehe nachstehende Abbildung).



t ... Zeit in h mit $t = 0$ für den Beginn der Messung
$f(t)$ ... Wasserstand zum Zeitpunkt t in cm mit $0 \leq t \leq 27{,}1$
$g(t)$ ... Wasserstand zum Zeitpunkt t in cm mit $27{,}1 \leq t \leq 50$

a) Es gilt: $f(t) = 0{,}00469 \cdot t^3 - 0{,}218 \cdot t^2 + 1{,}48 \cdot t + 164$

1) Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1, zu dem der Wasserstand um 10 % niedriger als zu Beginn der Messung ist. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die momentane Änderungsrate des Wasserstands 10 h nach Beginn der Messung. Geben Sie das Ergebnis mit der zugehörigen Einheit an. *[0/½/1 P.]*

Lösung

[1] Definiere f(***t***). Nutze für die Variable ***t*** die Zweitbelegung mit [Shift] [( ].

[2] (b1) Berechne f(***t***)=147,6 (=164 – 10 %). Da f(***t***) nur für 17,87 definiert ist, ist dies die einzige Lösung.

```
Define f(t)=0.00469t^3-0.218t^2+1.48t+164
                                        done
solve(f(t)=147.6,t
 {t=-5.702854239,t=17.86773263,t=34.31699794}
```

```
toDMS(17.86773263
              17°52'3.837468"
```

Antwort: Nach 17,87 Stunden oder 17 Stunden, 52 Minuten und 4 Sekunden.

[3] (b2) Definiere die erste Ableitung f1(***t***) (wie bei Aufgabe 1) und ermittle die Ableitung zum Zeitpunkt ***t*** = 10.

```
Define f1(t)=d/dt(f(t))
                       done
f1(10)
                     -1.473
```

Antwort: -1.473 cm/h.

Aufgabe 7 – Handcreme

a) Von der Nachfrage nach Handcremen der Marke *Hand Aktiv* ist bekannt:

Bei einem Preis von 4,2 GE/ME werden 500 ME nachgefragt.
Wird der Preis auf 3,2 GE/ME gesenkt, so verdoppelt sich die nachgefragte Menge.

Der Zusammenhang zwischen der nachgefragten Menge und dem Preis soll durch die lineare Preisfunktion der Nachfrage p_N beschrieben werden.

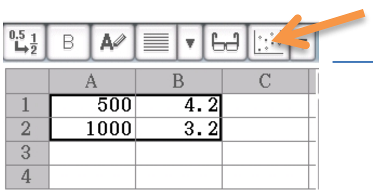
x ... nachgefragte Menge in ME
$p_N(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in GE/ME

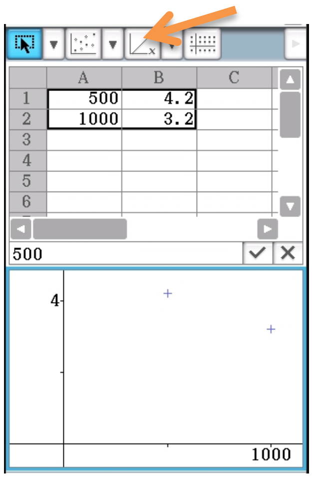
1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion p_N auf. *[0/1 P.]*

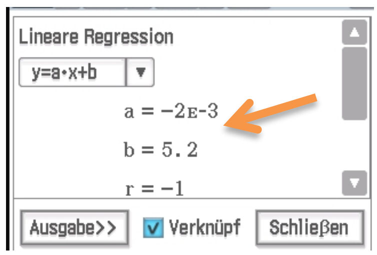
2) Berechnen Sie die Sättigungsmenge. *[0/1 P.]*

Lösung

a1) Öffne das Modul Tabellenkalkul. und gib die Werte lt. Angabe ein. Markiere anschließend die eingegebenen Werte und drücke auf den "Scatter-Button" . Führe anschließend eine lineare Regression durch Drücken auf durch.







Antwort: $P_N(x)=-0{,}002x+5{,}2$.

a2) Berechne die Nullstelle von $P_N(x)$

solve(−0.002x+5.2=0, x
{x=2600}

Antwort: Die Sättigungsmenge beträgt 2.600 ME.

c) Für die Grenzkostenfunktion K_2' bei der Produktion der Handcreme *Handrepair* gilt:

$K_2'(x) = 0{,}0003 \cdot x^2 + b \cdot x + 40$
x ... Produktionsmenge in ME
$K_2'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME

Die Fixkosten betragen 500 GE.

1) Tragen Sie in der nachstehenden Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K_2 die fehlenden Zahlen ein.

$K_2(x) = \boxed{} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot b \cdot x^2 + \boxed{} \cdot x + \boxed{}$ *[0/1 P.]*

Bei der Produktion von 100 ME betragen die Gesamtkosten 3600 GE.

2) Berechnen Sie b. *[0/1 P.]*

Lösung

c1) Berechne die Stammfunktion der Grenzkostenfunktion und setze die Fixkosten für d=500 ein. Bringe das Ergebnis mit *expand* in das gewünschte Format. *expand findet man in der Menüleiste unter Aktion/Umformungen- expand und ans (=Ergebnis der letzten Berechnung) fügt man mit* [Shift] [EXE] *ein.*

```
∫ 0.0003x^2+bx+40dx
0.0001·(x^3+5000·b·x^2+4000▶
expand(ans
      0.0001·x^3+0.5·b·x^2+40·x
```

Antwort: a=0,0001, c=40, d=500 → $K_2(x)=0{,}0001x^3+0{,}5bx^2+40x+500$

c2) Definiere K(x) und löse die Gleichung nach b.

```
Define K(x)=0.0001x^3+0.5bx^2+40x+500
                                      done
solve(K(100)=3600,b
                                  {b=-0.2}
```

Antwort: b=-0,2

Aufgabe 8 – Neuwagen

a) Lorena möchte einen Neuwagen um € 20.000 kaufen. Sie hat dafür auf einem Sparbuch einen Betrag von € 18.500 angespart. Der Zinssatz beträgt 2,1 % p.a.

1) Berechnen Sie, wie lange dieser Betrag auf dem Sparbuch veranlagt werden müsste, um einen Wert von € 20.000 zu erreichen. *[0/1 P.]*

Lösung

```
solve(20000=18500×1.021^x,x
                                    {x=3.751300108}
```

Antwort: b=3,75 Jahre – 3 Jahre und 9 Monate.

b) Mario hat vor 6 Jahren ein Konto eröffnet, um für einen Neuwagen zu sparen. Er zahlte 4 Jahre lang nachschüssige Quartalsraten auf dieses Konto ein. Die restlichen 2 Jahre tätigte er keine Einzahlungen mehr.

R ... Höhe der nachschüssigen Quartalsraten
i_4 ... Quartalszinssatz
q_4 ... vierteljährlicher Aufzinsungsfaktor

1) Tragen Sie die zwei fehlenden Hochzahlen in der nachstehenden Formel zur Berechnung des heutigen Kontostands K ein.

$$K = R \cdot \frac{q_4^{\square} - 1}{q_4 - 1} \cdot q_4^{\square}$$ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie R für $K = € 6.916{,}22$ und $i_4 = 0{,}5\ \%$. *[0/1 P.]*

Lösung

b1) Antwort: Die Hochzahlen lauten 16 und 8 (ohne Technologieeinsatz)

b2) Setze die Zahlen der Angabe ein und löse die Gleichung nach R.

$$\text{solve}\left(6916.22=R\times\frac{1.005^{\wedge}16-1}{0.005}\times1.005^{\wedge}8,R\right.$$

$$\{R=400.000082\}$$

Antwort: R= €400,00.

Aufgabe 9 – Beton

Für eine Baustelle werden 50 ME Leichtbeton und 30 ME Fundamentbeton bestellt.

3) Ermitteln Sie den Mengenbedarf an den 3 Rohstoffen für diese Bestellung. *[0/1 P.]*

Lösung

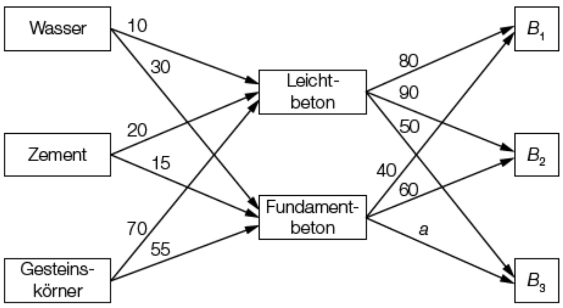
Führe die Matrizenmultiplikation aus. *Matrizen werden im ClassPad bei Math2 mit eingegeben. Durch mehrmaliges Drücken werden weitere Zeilen und Spalten eingefügt. Mit werden weitere Spalten und mit weitere Zeilen eingefügt.*

$$\begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & 15 \\ 70 & 55 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1400 \\ 1450 \\ 5150 \end{bmatrix}$$

Antwort: 1.400 l Wasser, 1.450 kg Zement, 5.150 l Gesteinskörner.

Im erweiterten Gozinto-Graphen (siehe nachstehende Abbildung) ist auch der Bedarf an Leichtbeton und Fundamentbeton für die 3 Baustellen B_1, B_2 und B_3 dargestellt.



Die Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreibt den Bedarf an Rohstoffen für die 3 Baustellen B_1, B_2 und B_3.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2000 & 2700 & 1340 \\ 2200 & 2700 & 1420 \\ 7800 & 9600 & 5040 \end{pmatrix}$$

4) Ermitteln Sie die Mengenangabe a. *[0/1 P.]*

Lösung

Führe die Matrizenmultiplikation aus und löse eine der 3 sich anbietenden Gleichungen nach a auf.

$$\begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & 15 \\ 70 & 55 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 80 & 90 & 50 \\ 40 & 60 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2000 & 2700 & 30 \cdot a+500 \\ 2200 & 2700 & 15 \cdot a+1000 \\ 7800 & 9600 & 55 \cdot a+3500 \end{bmatrix}$$

solve(30·a+500=1340, a

{a=28}

solve(15·a+1000=1420, a

{a=28}

Antwort: a=28

Aufgabe 9 – Beton [Bonus]

Das Bauunternehmen rechnet mit einem kalkulatorischen Zinssatz von 3 % p. a.

2) Berechnen Sie den Kapitalwert der Investition. *[0/1 P.]*

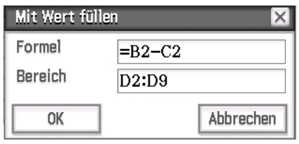
Für die Lösung dieser Aufgabe ist kein Technologieeinsatz notendig, der über einen Taschenrechner hinausgeht. Man kann die Aufgabe jedoch, wenn man im ClassPad etwas versierter ist, schön mit der Tabellen-kalkulat. -Anwendung lösen.

[1] Wir beginnen damit, dass wir die Tabelle erstellen und ausfüllen:

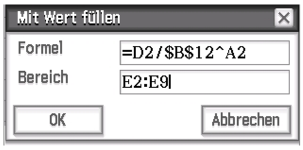
	A	B	C	D
1	Jahre	Einn.	Ausg.	Saldo
2	0	0	28000	
3	1	5000	0	
4	2	5000	1000	
5	3	5000	0	
6	4	5000	1000	
7	5	5000	0	
8	6	5000	1000	
9	7	8000	0	
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				

C13

[2] Den Saldo berechnen wir, indem wir die gleiche Formel in der Spalte D eingeben. Das machenmit dem Befehl in der Menüleiste *Edit/Füllen/Mit Wert* füllen in der Zelle D2 . Ebenso berechnen wir die Kapitalwerte indem wir die Zelle E2 ansteuern.



	C	D	E
1	Ausg.	Saldo	KW
2	28000	−28000	
3	0	5000	
4	1000	4000	
5	0	5000	
6	1000	4000	
7	0	5000	
8	1000	4000	
9	0	8000	
10			



[3] Nun geben wir in der Zelle E10 noch die Summe der Spalte E ein. Das geht mit *Calc/Liste berechnen/sum*.

	C	D	E
1	Ausg.	Saldo	KW
2	28000	−28000	−28000
3	0	5000	4854.37
4	1000	4000	3770.38
5	0	5000	4575.71
6	1000	4000	3553.95
7	0	5000	4313.04
8	1000	4000	3349.94
9	0	8000	6504.73
10			2922.12
11			
12			
13			
14			
15			
16			

=sum(E2:E9)

Antwort: Der Kapitalwert beträgt € 2.922,12