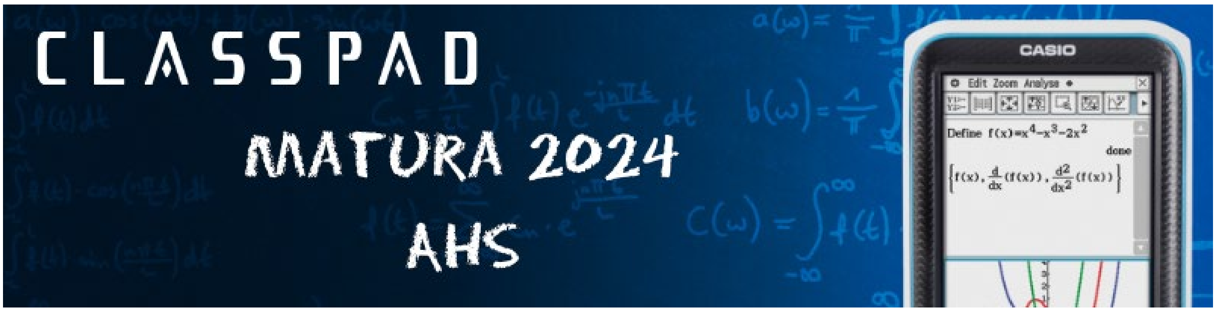
SRDP 07.05.2024 – Mathematik – **AHS**

Technologische Lösungsmöglichkeiten mit dem ClassPad II



Einführung

Dieses Jahr war ein schönes Technologiebeispiel in Teil 2. Aber auch bei einigen Teil 1-Aufgaben war ein Technologieeinsatz notwendig oder sehr vorteilhaft. Das ClassPad hat sich dabei wieder bestens bewährt.

Das Aufgabenheft sowie die Lösungen sind unter https://www.matura.gv.at/downloads als pdf-Dokument abrufbar.

Ich werde jeder Aufgabe eine Seite widmen und die jeweiligen technologie-relevanten Beispiele behandeln. Ich rechne zur Veranschaulichung der Möglichkeiten des ClassPads auch einige Beispiele mit Technologieeinsatz, die auch ohne diesen möglich gewesen wären – just for fun. Diese sind mit einem Stern gekennzeichnet.

Sollte nichts angegeben sein, so wird die Aufgabe in der 

-Anwendung ausgeführt.

Los geht´s!

Aufgabe 7 – Beschleunigung (✶)

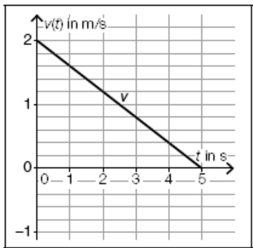
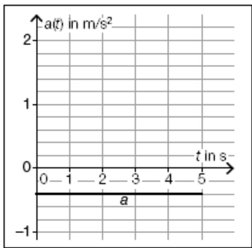
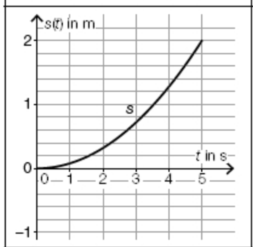
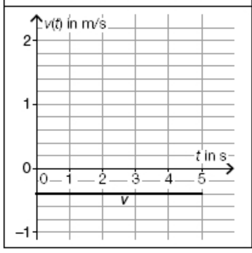
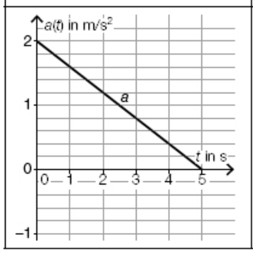
Ein Körper bewegt sich im Zeitintervall [0; 5] geradlinig mit einer konstanten Beschleunigung und kommt zum Zeitpunkt $t = 5$ zum Stillstand.

Für die Beschleunigung gilt: $a(t) = -0{,}4$

t ... Zeit in s
$a(t)$ ... Beschleunigung zum Zeitpunkt t in m/s²
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in m/s
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt t in m

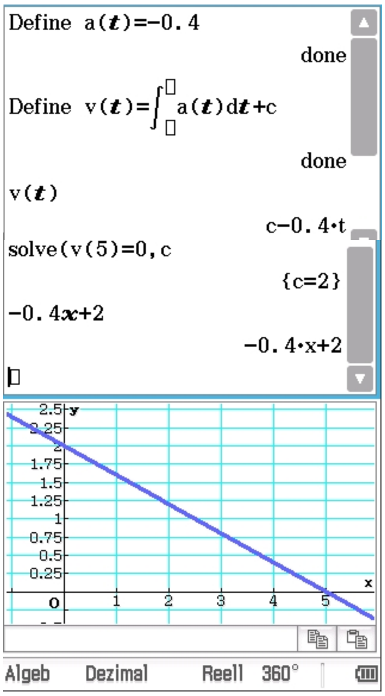
In zwei der unten stehenden Abbildungen wird die Bewegung des Körpers richtig dargestellt.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Abbildungen an. *[2 aus 5]*

	☐		☐
	☐		☐
	☐		

Lösung

Richtig sind die beiden Graphen der ersten Zeile, wobei a(t) trivial ist.



[1] Definiere a($\boldsymbol{t}$). Nutze für die Variable $\boldsymbol{t}$ die Zweitbelegung mit [Shift] [( ].

[2] Führe die Berechnungen durch.

[3] Gib in der letzten Zeile die Funktion mit der Einzeichen-Variablen "$\boldsymbol{x}$" ein (das ClassPad benötigt zum Zeichnen von Funktionen immer die Variable $\boldsymbol{x}$). Markiere den Ausdruck und tippe in der Symbolleiste auf [Graph-Symbol]. Passe die Darstellung mit [Zoom-Symbol] an und es erscheint bereits im ersten Durchgang die richtige Lösung.

Aufgabe 8 – Rennrad

Im Handbuch zu einem Rennrad sind folgende Werte angegeben:

Anzahl der Kurbelumdrehungen pro Minute	Geschwindigkeit in km/h
60	28,8
85	40,8

Die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Kurbelumdrehungen kann durch die lineare Funktion *v* modelliert werden.

x ... Anzahl der Kurbelumdrehungen pro Minute
v(*x*) ... Geschwindigkeit bei *x* Kurbelumdrehungen pro Minute in km/h

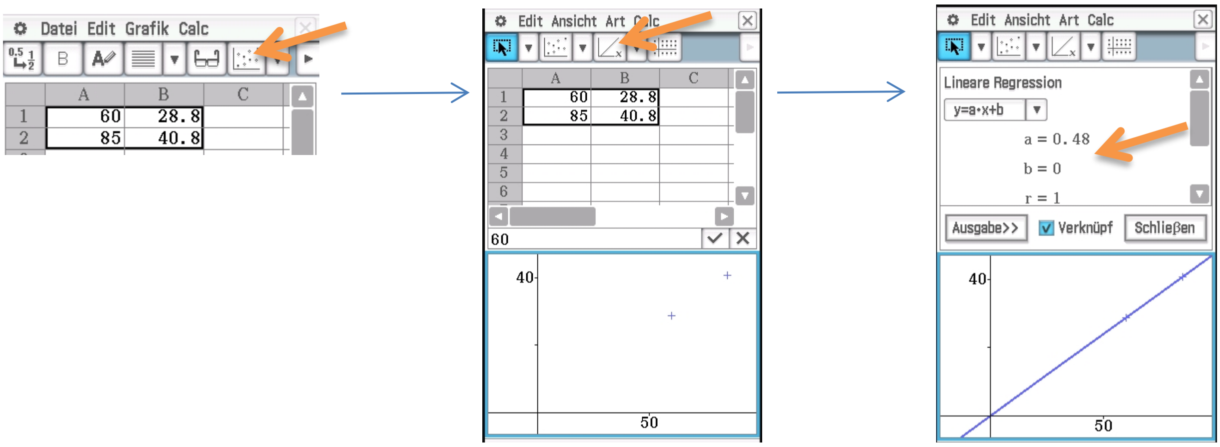
Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Gleichung von *v* auf.

v(*x*) = ______________________________

Lösung

Öffne das Modul Tabellen-kalkulat. und gib die Werte lt. Angabe ein. Markiere anschließend die eingegebenen Werte und drücke auf den "Scatter-Button" . Führe anschließend eine lineare Regression durch Drücken auf durch.



Lies nun die Lösung ab. v(x)=0,48x.

Aufgabe 9 – Potenzfunktion

Gegeben ist eine Potenzfunktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^z$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}$.

Es gilt:

- Verdoppelt man den Wert des Arguments x, so verringert sich der zugehörige Funktionswert auf ein Viertel des ursprünglichen Funktionswerts.
- Der Punkt $(2|2)$ liegt auf dem Graphen von f.

Aufgabenstellung:

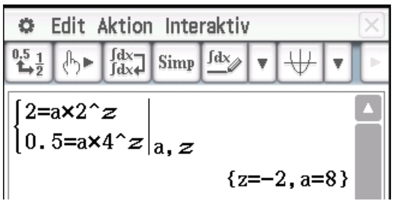
Geben Sie die Werte von a und z an.

z = _________

a = _________

Lösung

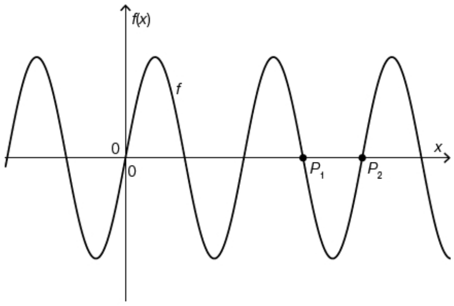
Öffne mit Keyboard die Softwaretastatur, erstelle unter Math1 mit ein Gleichungssystem und löse dieses nach ***z*** und ***a*** auf.



Antwort: a=8, z=-2

Aufgabe 12 – Sinusfunktion (✶)

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$.



Die Punkte $P_1 = (x_1|0)$ und $P_2 = (x_2|0)$ mit $x_1 = \frac{3 \cdot \pi}{4}$ und $x_2 = \pi$ liegen auf dem Graphen von f.

Es gilt: $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = -3$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie a und b.

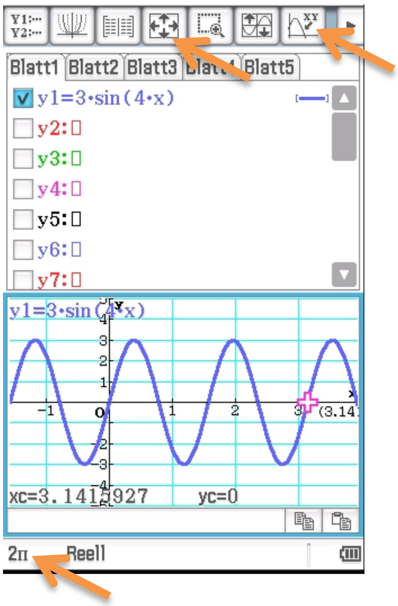
a = ____________________

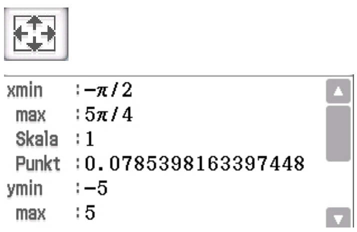
b = ____________________

Lösung

Für die Ermittlung von a und b ist kein Technologieeinsatz erforderlich. Es erweist sich jedoch als günstig, wenn man die gefundene Lösung graphisch kontrolliert. a=3, b=4

Öffne dazu das Modul Grafik & Tabelle und stelle in der Statusleiste das Bogenmaß "2p" ein. Gib die Funktionsgleichung ein und drücke auf . Passe die Darstellung mit an. Durch Drücken auf kann man den Cursor noch auf eine Nullstelle führen und diese überprüfen.



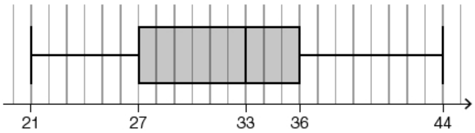


Aufgabe 19 – Vergleich zweier Diagramme

Vergleich zweier Diagramme

In den nachstehenden Abbildungen ist die Datenliste A in einem Stängel-Blatt-Diagramm und die Datenliste B als Boxplot dargestellt.

2	1 7 7 9
3	1 3 6 6
4	3



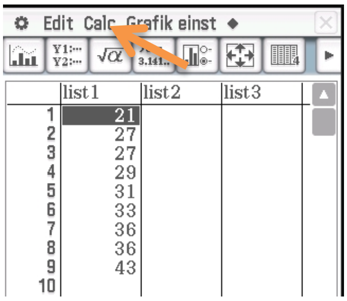
Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden statistischen Kennzahlen an, bei denen sich die Datenlisten A und B unterscheiden. *[2 aus 5]*

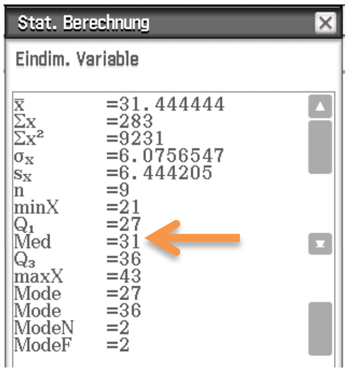
1. Quartil	☐
Spannweite	☐
3. Quartil	☐
Minimum	☐
Median	☐

Lösung

Öffne die  -Anwendung und gib die Datenliste A ein.



Calc/Eindim.Variable
X-List: list1 Häufigk. 1



Vergleiche anschließend die Werte mit den Werten des Boxplots. Man erkennt sofort, dass der Median unterschiedlich ist, die anderen vom ClassPad ausgewerteten Werte aber ident sind. Somit bleibt auch nur mehr die Spannweite als zweiter Lösungswert übrig.

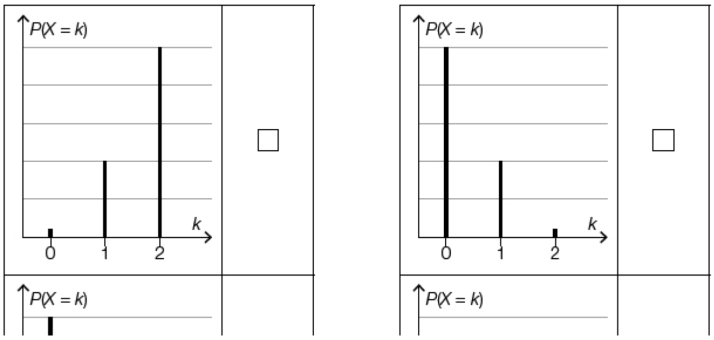
Aufgabe 23 – Wahrscheinlichkeitsverteilung (✶)

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Ein fairer 6-seitiger Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 wird 2-mal geworfen.
Die Zufallsvariable *X* gibt an, wie oft bei diesen 2 Würfen die Augenzahl 6 auftritt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige Abbildung an, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung von *X* richtig darstellt.
[1 aus 6]

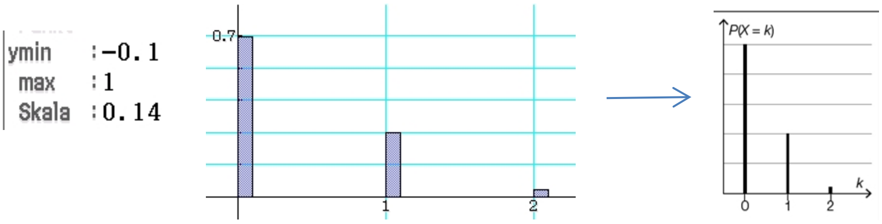


Lösung

Für die Ermittlung der Lösung ist kein Technologieeinsatz erforderlich. Es erweist sich jedoch als günstig, wenn man die gefundene Lösung grafisch kontrolliert.

Öffne die Statistik-Anwendung und gib in "list1" die Zufallsvariable und in "list2" die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten ein. Tippe in der Symbolleiste auf und wähle das "Histogramm" mit X-List: *list1* und Häufigk: *list2* aus. Zeichne anschließend das Histogramm mit dem -Button und vergleiche mit den Lösungsmöglichkeiten.

Durch folgende Fenstereinstellung erhält man die selbe Skalierung wie in der Angabe und die Lösung ist direkt abzulesen.



Antwort: Das Diagramm in der ersten Zeile und zweiten Spalte ist richtig.

Aufgabe 24 – Computerspiel

Ein bestimmtes Computerspiel besteht aus mehreren Spielrunden.
Bei einer Spielrunde gibt es jeweils 5 Fragen mit jeweils 4 Antwortmöglichkeiten, von denen immer nur 1 Antwortmöglichkeit richtig ist.
Eine Spielrunde gilt als gewonnen, wenn mehr als die Hälfte der Fragen richtig beantwortet wird.
Die 4 Antwortmöglichkeiten sind bei jeder Frage nach dem Zufallsprinzip angeordnet.

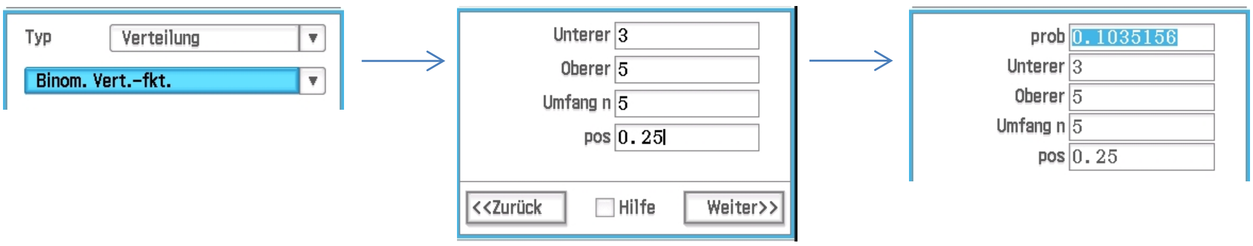
Gerhard wählt, ohne die Fragen zu lesen, bei einer bestimmten Spielrunde jedes Mal die erste Antwortmöglichkeit aus.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Gerhard diese Spielrunde gewinnt.

Lösung

Öffne die Statistik -Anwendung und stelle über die Menüleiste *Calc/Verteilung* bei Verteilung "*Binom.Vert.-fkt.*" ein. Gib anschließend die Werte in der Maske ein und lies das Ergebnis direkt ab.



Antwort: Die Wahrscheinlichkeit beträgt 10,35 %.

Aufgabe 26 – Bungee-Jumping

Bungee-Jumping ist eine Extremsportart, bei der man von einer Absprungplattform in großer Höhe an einem elastischen Seil befestigt in die Tiefe springt.

Aufgabenstellung:

a) Sabine unternimmt einen Bungeesprung. Dabei schwingt sie am Seil mehrmals auf und ab.

Ihre Höhe über dem Boden in Abhängigkeit von der Zeit t wird modellhaft durch die Funktion $h\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ beschrieben.

$$h(t) = a \cdot \left(e^{-0{,}03 \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + 1\right)$$

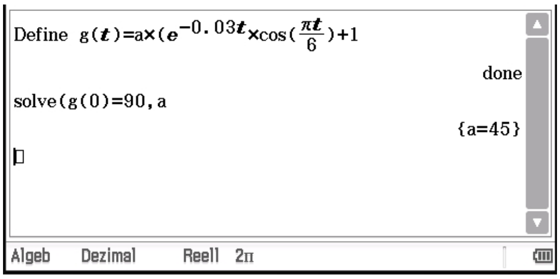
t ... Zeit nach dem Absprung in s
$h(t)$ ... Höhe über dem Boden zum Zeitpunkt t in m
a ... positiver Parameter

Zum Zeitpunkt $t = 0$ springt Sabine von der Absprungplattform in 90 m Höhe über dem Boden in die Tiefe.

1) Berechnen Sie den Parameter a. *[0/1 P.]*

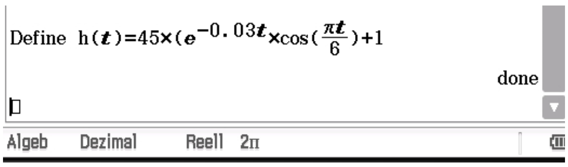
Lösung

Stelle in der Statusleiste das Bogenmaß "2p" ein. Definiere die Funktion und verwende für die Variable ***t*** die Zweitbelegung mit [Shift] [( ]. *Anmerkung: Ich habe vorerst die Funktion g(t) genannt, weil ich danach mit der vollständigen Funktion (dh. nach Berechnung des Parameters a) mit h(t) weiterrechnen wollte.*



Antwort: a=45

Zur weiteren Berechnung definiere nun die Funktion h(t): *Nutze dazu die Drag & Drop-Funktion des ClassPads.*



Die gesamte Zeitdauer, in der sich Sabine während des Bungeesprungs in einer Höhe von mehr als 70 m über dem Boden befindet, wird mit *d* bezeichnet.

2) Ermitteln Sie *d* in Sekunden. *[0/1 P.]*

Lösung1 (rechnerisch)

```
solve(h(t)=70,t
{t=-38.66566585,t=-33.392▶
```

gibt viele negative Werte aus, sodass es in einem zweiten Schritt ratsam erscheint, mit dem Bedingungsoperator ***t*** positiv vorauszusetzen.

```
solve(h(t)=70,t)|t≥0
   {t=1.803182516,t=10.66356585,t=13.14962812}
```

Jetzt gibt es nur mehr 3 Lösungen. Da die Funktion stetig ist, gilt es zu überprüfen, wann Werte größer als 70 angenommen werden. *Leider hat solve h(t)>=70,t nicht funktioniert.*

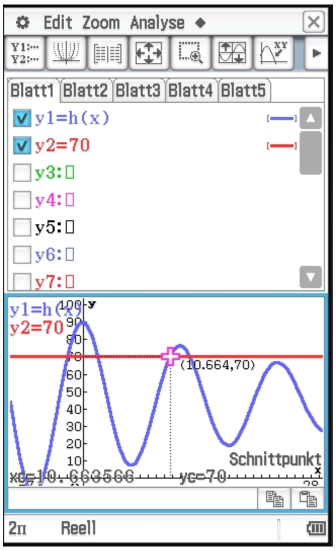
```
h(t)|t=1
                70.05989789
h(t)|t=5
                11.45722622
h(t)|t=12
                76.39543467
h(t)|t=14
                59.78355345
```

Daraus ist ersichtlich, dass im Intervall [0;1,8] und im Intervall [10,66; 13,15] die Höhe über 70 m ist und somit ergibt sich als Lösung 1,8+(13,15–10,66) = 4,29.

Antwort: 4,29 Sekunden

Lösung2 (grafisch)

Zeichne mit dem ClassPad die Graphen von h(t) und der konstanten Funktion f(x)=70 und ermittle mittels *Analyse / Grafische Lösung / Schnittp*unkt die Lösungen mit den Cursortasten. Hier sieht man auch sofort das Verhalten der Funktion.



Antwort: 4,29 Sekunden

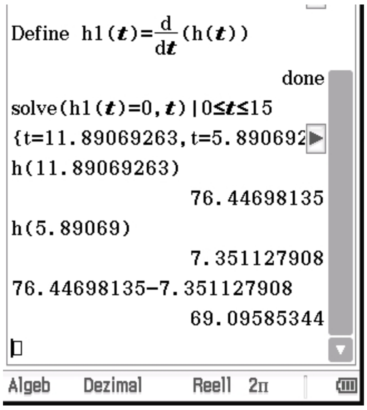
Persönliche Anmerkung: Ein schönes Technologiebeispiel

Nach Erreichen des tiefsten Punktes wird Sabine vom Seil wieder nach oben gezogen, bevor sie erneut fällt.

3) Berechnen Sie, wie viele Meter Sabine dabei nach oben gezogen wird. *[0/1 P.]*

Lösung1 (rechnerisch)

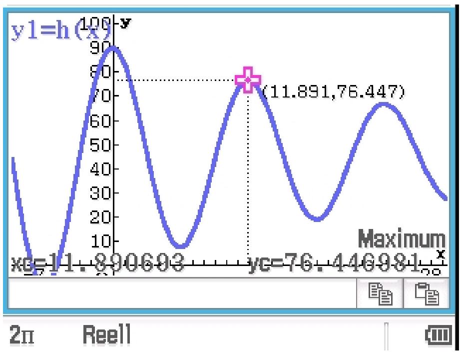
Definiere mit dem ClassPad die erste Ableitungsfunktion h1(***t***) und berechne mit "solve" die Extremwerte.



Antwort: 69,1 Meter

Lösung2 (grafisch)

Verwende den Funktionsgraphen von der vorigen Teilaufgabe und ermittle das gefragte Minimum und Maximum mit *Analyse / Grafische Lösung / Minimum und Maximum* und lies die entsprechenden Werte ab.



Aufgabe 27 – Taschenlampen

c) Die Gesamtkosten für die Herstellung der Taschenlampen in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x können durch die differenzierbare Kostenfunktion K modelliert werden.

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

Die zugehörige Grenzkostenfunktion K' hat die Funktionsgleichung
$K'(x) = 0{,}33 \cdot x^2 - 1{,}8 \cdot x + 3$.

Es gilt: $K(1) = 44{,}21$

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von K auf.

$K(x) =$ ______________________________ [0/1 P.]

```
Define k(x)=0.33x^2-1.8x+3
                              done
Define K(x)=∫k(x)dx
                              done
K(x)+c
        0.11·x^3-0.9·x^2+3·x+c
solve(K(1)+c=44.21,c
                            {c=42}
```

Antwort: $K(x)=0{,}11x^3-0{,}9x^2+3x+42$

Der Erlös aus dem Verkauf dieser Taschenlampen in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x kann durch die Funktion E modelliert werden.

$E(x) = a \cdot x$

x ... Produktionsmenge in ME
$E(x)$ ... Erlös bei der Produktionsmenge x in GE
a ... Preis in GE/ME

Der Gewinn wird durch die Gewinnfunktion G modelliert (x in ME, $G(x)$ in GE).

Das Betriebsziel ist, bei einer Produktion und einem Verkauf von 5 ME Taschenlampen einen Gewinn von mindestens 100 GE zu erzielen.

2) Berechnen Sie den kleinstmöglichen Preis, mit dem dieses Betriebsziel erreicht wird.

```
Define K(x)=0.11·x^3-0.9·x^2+3·x+42
                              done
Define E(x)=a×x
                              done
Define G(x)=E(x)-K(x)
                              done
solve(G(5)≥100,a
                         {a≥29.65}
```

Antwort: 29,65 GE/ME

Aufgabe 28 – Belastungstests

b) Katharina unterzieht sich einem anderen Belastungstest. Dabei wird die Laktatkonzentration in ihrem Blut zu Beginn, während und nach einer intensiven Belastung gemessen.

Die Funktion c_2: $[0; 30] \to \mathbb{R}^+$ mit $c_2(t) = 31{,}2 \cdot (e^{-0{,}066 \cdot t} - e^{-0{,}325 \cdot t}) + 1{,}13$ beschreibt modellhaft die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Zeit t ab Beginn des Belastungstests (t in min, $c_2(t)$ in mmol/L).

Zum Zeitpunkt t_1 ist die Laktatkonzentration wieder auf die Hälfte des maximal erreichten Wertes abgesunken.

1) Ermitteln Sie t_1. *[0/1 P.]*

Lösung

In einem ersten Schritt definieren wir die Funktion und bilden danach die erste Ableitung und errechnen daraus einen Extremwert. Durch Überprüfung stellen wir fest, dass es sich um ein Maximum handelt. Danach berechnen wir jenen Wert, wo die Konzentration wieder die Hälfte angenommen hat.

Define $c2(t)=31.2\times(e^{-0.066t}-e^{-0.325t})+1.13$
done

Define $c21(t)=\frac{d}{dt}(c2(t))$
done

Define $c22(t)=\frac{d}{dt}(c21(t))$
done

$\longrightarrow$

solve(c21(t)=0,t
{t=6.155098225}
c22(t)|{t=6.155098225}
−0.3552810395
c2(t)|{t=6.155098225}
17.69321862
solve$\left(c2(t)=\frac{17.69321862}{2},t\right)$
{t=1.203327703,t=21.1031

t=1,203 scheidet als Lösung aus, da dieser Zeitpunkt vor dem Zeitpunkt des Maximalwertes liegt. Somit verbleibt folgende Antwort: t_1= 21,1 Minuten.