SRDP 03.05.2023 –Mathematik – **AHS**

Technologische Lösungsmöglichkeiten mit dem ClassPad II

Einleitung

Sehr geehrte Leserin,
geschätzter Leser,

in diesem Artikel möchte ich Ihnen Möglichkeiten zur Lösung von Aufgaben der SRDP 2023 für die AHS mittels Technologieeinsatz anbieten. Ich setze den ClassPad II seit einigen Jahren als CAS Instrument ein.

Das Aufgabenheft sowie die dazugehörigen Lösungen sind unter https://www.matura.gv.at/downloads/download/haupttermin-2022-23-mathematik-ahs als Dokumente im pdf-Format abrufbar.

Ich stelle hier eine Bearbeitungsmöglichkeit bei jenen Beispielen vor, bei denen ein Technologieeinsatz möglich, aber nicht zwingend erforderlich ist.

Grundsätzlich werden die Aufgaben in der Anwendung 

bearbeitet.

Meiner Meinung nach war es eine schöne Matura, wenn auch aus meiner Sicht der erforderliche Technologieeinsatz etwas mehr Raum einnehmen hätte können.

Aufgabe 3 - Smoothie

Der Vitamin-C-Gehalt von Schwarzen Johannisbeeren beträgt durchschnittlich 177 mg pro 100 g, der Vitamin-C-Gehalt von Kiwis beträgt durchschnittlich 46 mg pro 100 g.

Für einen Smoothie sollen die beiden Fruchtsorten so gemischt werden, dass man eine Mischung mit insgesamt 75 g erhält, die 100 mg Vitamin C enthält.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Menge an Schwarzen Johannisbeeren (in g) und die Menge an Kiwis (in g), die für diesen Smoothie gemischt werden müssen.

$$\left.\begin{cases} x+y=75 \\ 1.77x+0.46y=100 \end{cases}\right|_{x,\,y} \qquad \{x=50,\ y=25\}$$

x g Schwarze Johannisbeeren enthalten $1{,}77 \cdot x$ mg Vitamin C
und
y g Kiwis enthalten $0{,}46 \cdot y$ mg Vitamin C

Antwort: Man muss 50 g Schwarze Johannisbeeren und 25 g Kiwis mischen.

Aufgabe 4 - Grafische Darstellung von Vektoren

In der unten stehenden Abbildung sind die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ als Pfeile ausgehend vom Punkt *P* dargestellt.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie ausgehend vom Punkt *P* den Vektor $\vec{b}$ als Pfeil so ein, dass gilt: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow c$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

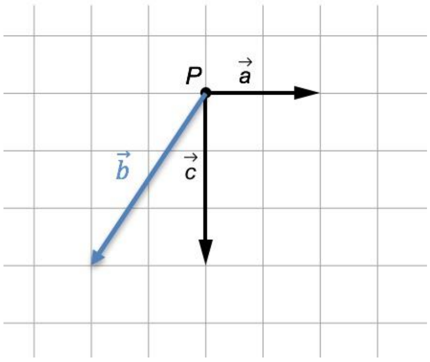
$\begin{bmatrix} b1 \\ b2 \end{bmatrix} \Rightarrow b$

$$\begin{bmatrix} b1 \\ b2 \end{bmatrix}$$

solve(a+b=c, {b1, b2})

{b1=−2, b2=−3}

Berechnung von $\vec{b}$ durch Ablesen der Koordinaten von $\vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$:



Aufgabe 5 - Geradengleichungen

Gegeben sind die Geraden *g* und *h* mit den Gleichungen $g: X = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $h: X = \begin{pmatrix}2\\b\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}a\\2\end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

Die Geraden *g* und *h* sind identisch.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die reellen Zahlen *a* und *b*.

$$\text{solve}\left(\begin{bmatrix}a\\2\end{bmatrix}=k*\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, a\right)$$

$$\{a=2\}$$

g und h sind identisch, wenn der Richtungsvektor von h ein Vielfaches des Richtungsvektors von g ist

$$g:=\begin{bmatrix}2\\b\end{bmatrix}+s*\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\cdot s+2\\b+2\cdot s\end{bmatrix}$$

<u>und</u>

$$\text{solve}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot s+2\\b+2\cdot s\end{bmatrix}, b\right)$$

$$\{b=1\}$$

wenn der Stützpunkt von g auf der Geraden h liegt!

Antwort: a = 2 und b = 1

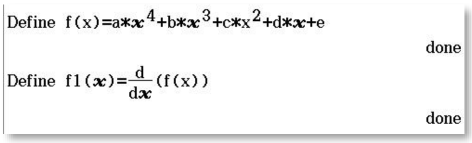
Aufgabe 7 – Graph einer Polynomfunktion

Eine Polynomfunktion 4. Grades *f* hat folgende Eigenschaften:

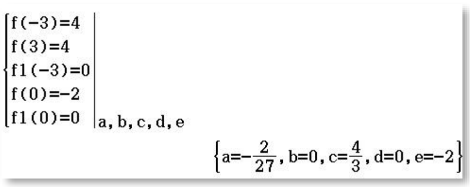
- *f* hat an der Stelle $x = -3$ ein lokales Maximum.
- Der Graph von *f* ist symmetrisch bezüglich der senkrechten Achse.

Aufgabenstellung:

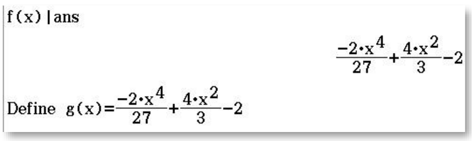
Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem im Intervall [–4; 4] den Graphen einer solchen Polynomfunktion *f*.



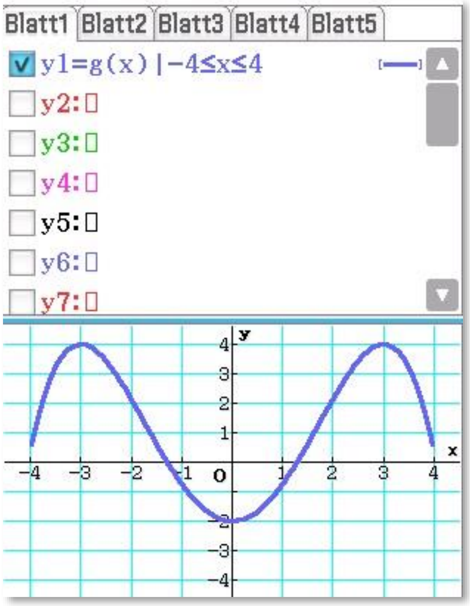
Modellieren einer Funktion
$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$,
die die gegebenen Vorgaben erfüllt:



$f(-3) = 4$
$f(3) = 4$
$f'(-3) = 0$
$f(0) = -2$
$f'(0) = 0$



Die berechneten Koeffizienten in die Funktionsgleichung einsetzen und dann als Funktion g für die Zeichnung definieren.



Im Menü Grafik und Tabelle wählen und dann den Graphen der Funktion zeichnen lassen.

Aufgabe 8 – Länge einer Kerze

Eine zylinderförmige Kerze hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Länge von 10 cm. Nach einer Brenndauer von 120 min hat die Kerze eine Länge von 4 cm.
Die lineare Funktion L beschreibt modellhaft die Länge der Kerze in Abhängigkeit von der Brenndauer t mit $0 \leq t \leq 200$ (t in min, $L(t)$ in cm).

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Funktionsgleichung von L auf.

```
Define L(t)=k*t+d
                          done
{L(0)=10
{L(120)=4 |k,d
             {k=-0.05,d=10}
```

Aufsuchen einer linearen Funktion

$$L(t) = k \cdot t + d$$

deren Graph durch die Punkte $A = (0|10)$ *und* $B = (120|4)$ *verläuft:*

Antwort: $L(t) = -0{,}05 \cdot t + 10$

Aufgabe 9 – Parameter einer quadratischen Funktion

Der Graph der quadratischen Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^2 + b$ hat im Punkt $S = (0|-2)$ ein lokales Minimum und verläuft durch den Punkt $P = (1|0)$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die reellen Parameter a und b.

```
Define f(x)=a*x^2+b
                          done
{f(1)=0
{f(0)=-2 |a,b
                   {a=2,b=-2}
```

Gleichungssystem mit $f(1) = 0$ *und* $f(0) = -2$*:*

Antwort: $a = 2$ *und* $b = -2$

Aufgabe 11 - Jahreszinssatz

Das Kapital K_0 wächst exponentiell mit dem gleichbleibenden Jahreszinssatz i.
Nach n Jahren erreicht das Kapital den Wert K_n, der mit der nachstehenden Formel berechnet werden kann.

$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$

Nach 6 Jahren hat das Kapital K_0 um insgesamt 8,62 % zugenommen.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Jahreszinssatz i.

```
solve(K*1.0862=K*(1+i)^6,i
                {i=-2.013876289,i=0.01387628866}
```

Antwort: i = 0,013876...

Aufgabe 15 – Produktionskosten

Die monatlichen Fixkosten eines Betriebs für die Produktion von Erfrischungsgetränken betragen € 200.000.
Die Funktion K beschreibt modellhaft die monatlichen Gesamtkosten für diese Produktion (in Euro) in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x.

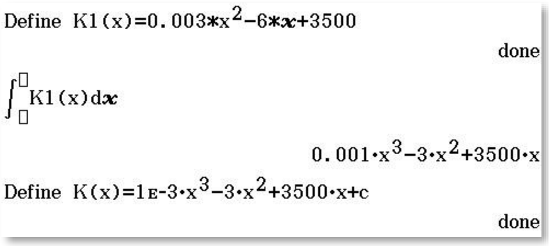
Die Grenzkosten für diese Produktion werden durch die Funktion K' beschrieben.

$K'(x) = 0{,}003 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 3500$

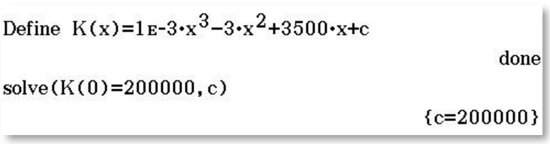
x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in Euro pro Mengeneinheit

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Funktionsgleichung von K auf.



K ist eine Stammfunktion von K'



Bestimmung der Integrationskonstanten

Antwort: $K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 3\,500 \cdot x + 200000$

Aufgabe 16 - Ableitungsfunktion

In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der konstanten Ableitungsfunktion *f′* einer Funktion *f* dargestellt. Für die Funktion *f* gilt: *f*(0) = 2

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der Funktion *f* ein.

Define f1(x)=−2

done

$\int_{\square}^{\square} f1(x)\,dx$

$-2\cdot x$

Define f(x)=−2·x+c

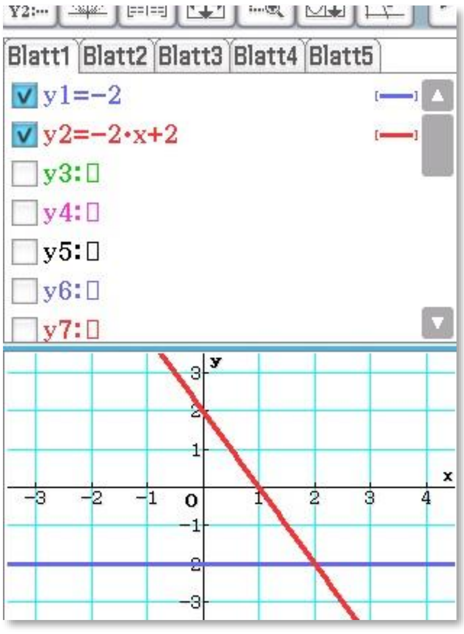
done

solve(f(0)=2, c)

{c=2}

$f'(x) = 2$

Bestimmung der Stammfunktion und Einsetzen der Anfangsbedingung



Graphen zeichnen lassen!

Aufgabe 19 - Monatsgehälter

Ein bestimmtes Unternehmen hat zwei Abteilungen.

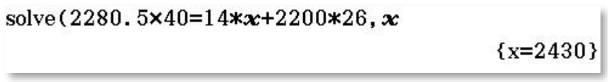
In der ersten Abteilung gibt es 14 Angestellte und in der zweiten Abteilung gibt es 26 Angestellte. Über

die Monatsgehälter der Angestellten ist Folgendes bekannt:

- Das arithmetische Mittel der Monatsgehälter aller 40 Angestellten beträgt € 2.280,50.
- Das arithmetische Mittel der Monatsgehälter der Angestellten der zweiten Abteilung beträgt € 2.200,00.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{x}$ der Monatsgehälter der Angestellten der ersten Abteilung.



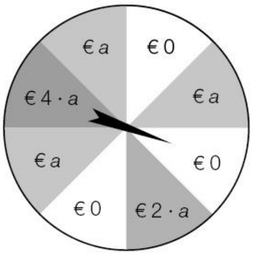
Antwort: $\bar{x} = 2430$ €

Aufgabe 23 - Glücksrad

In der Mitte des unten abgebildeten Glücksrads ist ein Zeiger montiert. Für jede Drehung des Zeigers gilt:

Der Zeiger bleibt in jedem Sektor mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ stehen.

Die Gewinne, die ausbezahlt werden, wenn der Zeiger im entsprechenden Sektor stehen bleibt, sind auf dem nachstehend abgebildeten Glücksrad angeschrieben ($a \in \mathbb{R}^+$).



Der Zeiger wird 1-mal gedreht.

Die Zufallsvariable X gibt dabei die Höhe des ausbezahlten Gewinns an. Für den Erwartungswert in Euro gilt: $E(X) = 4{,}5$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie a.

$$\text{solve}\left(0*\frac{3}{8}+a*\frac{3}{8}+2*a*\frac{1}{8}+4*a*\frac{1}{8}=4.5, a\right)$$

$$\{a=4\}$$

Antwort: $a = 4$

Aufgabe 25 - Schwimmbecken

In einem Freibad gibt es verschiedene Schwimmbecken.

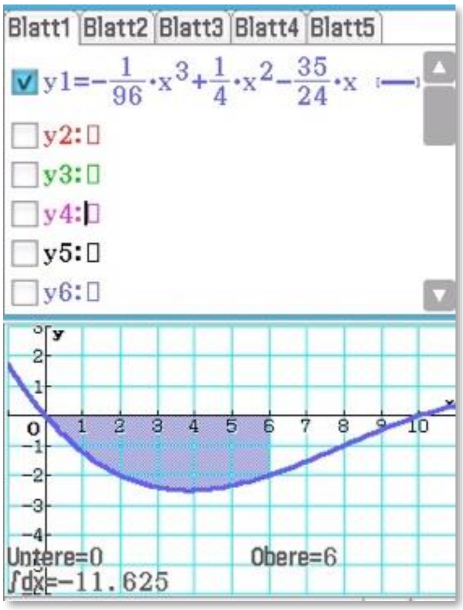
a)

b) 1)

2) Die Wassermenge in diesem Schwimmbecken nimmt durch Verdunstung und durch betriebsbedingte Ursachen ab. Dabei beschreibt die Funktion

W: [0; 10] → $\mathbb{R}$ mit $W(t) = -\frac{1}{96} \cdot t^3 + \frac{1}{4} \cdot t^2 - \frac{35}{24} \cdot t$ modellhaft die momentane Änderungsrate der Wassermenge zum Zeitpunkt t an einem bestimmten Tag (t in h, $W(t)$ in m^3/h).

Ermitteln Sie die Abnahme der Wassermenge (in m^3) im Zeitintervall [0; 6].

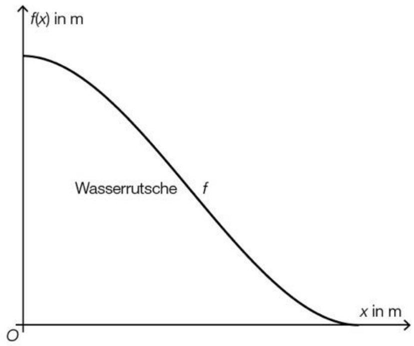


Zeichnen des Graphen der Funktion W mit anschließender „Flächenberechnung" mit

und

Antwort: Die Wassermenge nimmt um 11,625 m^3 ab.

c) 1) In der nachstehenden Abbildung ist das seitliche Profil einer bestimmten Wasserrutsche modellhaft dargestellt.

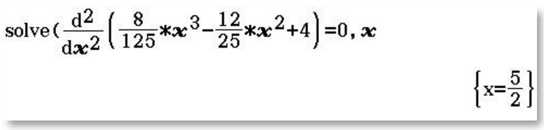


Das seitliche Profil der Wasserrutsche ist durch den Graphen der Funktion f: $[0; 5] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{8}{125} \cdot x^3 - \frac{12}{25} \cdot x^2 + 4$$

gegeben (x in m, $f(x)$ in m).

Ermitteln Sie die Stelle x_1, an der die Wasserrutsche am steilsten bergab verläuft.



Da das Gefälle an der Wendestelle am größten ist, muss die Wendestelle bestimmt werden.

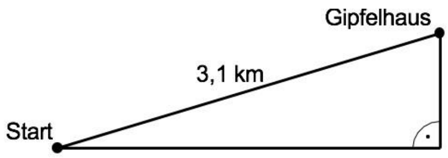
Antwort: $x_1 = 2{,}5$

Aufgabe 26 (Teil 2, Best-of-Wertung) Fitnessuhren

Fitnessuhren sind Armbanduhren, die bei sportlichen Aktivitäten verwendet werden können.

Aufgabenstellung:

a) Eine 3,1 km lange Bergtour führt vom Start auf 680 m Seehöhe zu einem Gipfelhaus auf 1820 m Seehöhe. Der dabei zurückgelegte Weg wird modellhaft als geradlinig mit konstanter Steigung angenommen und ist in der nachstehenden Skizze (nicht maßstabgetreu) dargestellt.



Der Weg der Bergtour weist eine Steigung von *a* % auf.

1) Ermitteln Sie *a*.

$$\frac{1820-680}{\sqrt{3100^2-(1820-680)^2}}$$

$$0.3954521011$$

Antwort: $a = 39{,}55\ \%$

b)

c) Fitnessuhren zeigen unter anderem den Kalorienverbrauch bei einer sportlichen Aktivität an. Im Rahmen einer Studie wird bei 60 Personen die prozentuelle Abweichung des tatsächlichen Kalorienverbrauchs bei einer sportlichen Aktivität vom jeweiligen Messergebnis ihrer Fitnessuhren untersucht.
Diese Abweichungen mit den jeweils zugehörigen absoluten Häufigkeiten sind in der nachstehenden Tabelle nach Klassen zusammengefasst.

Abweichung in %	absolute Häufigkeit
[0; 20)	24
[20; 30)	30
[30; 50]	6

Erstellen Sie ein Histogramm, in dem für die drei oben angegebenen Klassen die relativen Häufigkeiten als Flächeninhalte von Rechtecken dargestellt sind.

$\text{solve}(20*h=\frac{24}{60},h$

$\{h=0.02\}$

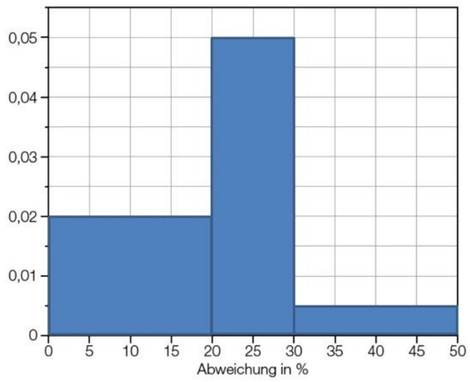
$\text{solve}(10*h=\frac{30}{60},h$

$\{h=0.05\}$

$\text{solve}(20*h=\frac{6}{60},h$

$\{h=0.005\}$

Berechnung der Höhen der Rechtecke.



Histogramm

Aufgabe 27 (Teil 2, Best-of-Wertung) Sauerstoffverbrauch von Säugetieren

Bei Säugetieren gibt es einen Zusammenhang zwischen der Körpermasse und dem Sauerstoffverbrauch.

Aufgabenstellung:

a) Für ein Säugetier, das sich im Beobachtungszeitraum nicht bewegt, kann der Sauerstoffverbrauch in Abhängigkeit von der Körpermasse m näherungsweise durch eine Funktion
$S: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, m \mapsto S(m)$ beschrieben werden (m in kg, $S(m)$ in L/h).

Für Katzen und Hunde mit einer Körpermasse m in kg gilt annähernd:

$S(m) = a \cdot m^{0,75}$

a ... positive Konstante

Die Körpermasse eines bestimmten Hundes ist doppelt so groß wie die einer bestimmten Katze.

Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Sauerstoffverbrauch dieses Hundes höher als der dieser Katze ist.

Define $S(m)=a*m^{0.75}$

done

$\frac{S(2m)-S(m)}{S(m)}$

$\frac{a\cdot(2\cdot m)^{0.75}-a\cdot m^{0.75}}{a\cdot m^{0.75}}$

simplify(

0.6817928305

Antwort: 68,18 %

Aufgabe 28 (Teil 2, Best-of-Wertung) Flugreisen

An den österreichischen Flughäfen werden die Anzahl der Flüge, die Anzahl der Fluggäste sowie die Flugstrecken der Reisenden erfasst.

Datenquelle:
https://www.statistik.at/web_de/statistiken/energie_umwelt_innovation_mobilitaet/verkehr/luftfahrt/personenverkehr/index.html [19.12.2020].

Aufgabenstellung:

a) Die jährliche Anzahl aller Fluggäste in Österreich ist von 0,14 Millionen im Jahr 1955 auf 28,95 Millionen im Jahr 2017 gestiegen.

Diese zeitliche Entwicklung der Anzahl der Fluggäste in Österreich kann näherungsweise durch die Exponentialfunktion $N: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $N(t) = a \cdot b^t$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden (t in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1955, $N(t)$ in Millionen Fluggästen).

1) Berechnen Sie a und b.

```
Define N(t)=a×b^t
                                         done
{N(0)=0.14
{N(62)=28.95 |a, b
{{a=0.14,b=-1.089800757},{a=0.14,b=1.089800▶
```

Antwort: $a = 0{,}14 \qquad b = 1{,}0898$

Im Jahr 2018 gab es in Österreich 31,73 Millionen Fluggäste.

2) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die mit N ermittelte Anzahl der Fluggäste für das Jahr 2018 um weniger als 1 % von der tatsächlichen Anzahl der Fluggäste abweicht.

```
Define N(t)=0.14×1.0898^t
                        done
N(63)-31.73
-----------
   31.73
           -0.00572484273
```

Berechnung der relativen Änderung

Antwort: Die Abweichung beträgt 0,572 %.

b) Die Anzahl der Flüge bzw. Fluggäste in Österreich ist für die Jahre 2018 und 2019 in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Anzahl der Flüge	Anzahl der Fluggäste
2018	296 852	31 725 019
2019	319 945	36 206 642

Die durchschnittliche Anzahl der Fluggäste pro Flug ist von 2018 auf 2019 um *n* gestiegen.

1) Berechnen Sie *n*.

$$\frac{36206642}{319945}-\frac{31725019}{296852}$$

$$6.293704896$$

Antwort: $n = 6{,}2937\ \ldots$