SRDP 03.05.2022 – Mathematik – **AHS**

Technologische Lösungsmöglichkeiten mit dem ClassPad II

Einführung

Die Zentralmatura hat auch in diesem Jahr wieder sehr wenige Beispiele mit zwingendem Technologieeinsatz aufgewiesen. Ich persönlich trauere den für mich schönen "Praxisbeispielen" in Teil 2 der vergangenen Jahre nach.

Das Aufgabenheft sowie die Lösungen sind unter https://www.matura.gv.at/downloads als pdf-Dokument abrufbar.

Ich werde jeder Aufgabe eine Seite widmen und die jeweiligen technologie-relevanten Beispiele behandeln.

Sollte nichts angegeben sein, so wird die Aufgabe in der 

- Anwendung ausgeführt.

Los geht´s!

Aufgabe 2 – Quadratische Gleichung

Gegeben ist die folgende quadratische Gleichung in der Variablen x:

$3 \cdot x^2 + a = 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 4 \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie alle Werte von a, für die die gegebene Gleichung zwei verschiedene Lösungen in $\mathbb{R}$ hat.

Lösung

```
solve(3x^2+a=2x^2+6x-4, x
    {x=-√(-a+5)+3, x=√(-a+5)+3}
solve(-a+5>0, a
                        {a<5}
```

Anmerkung
Es ist nicht notwendig, die Gleichung vorher umzuformen. Die Diskriminante ergibt sich als Term unter dem Wurzelausdruck. Bei 2 Lösungen muss dieser >0 sein.

Aufgabe 3 – Punkt einer Geraden

Gegeben sind die Gerade g in $\mathbb{R}^3$ mit $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$, und der Punkt $A = \begin{pmatrix} 10 \\ -19 \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Der Punkt A liegt auf der Geraden g.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie a.

Lösung

$$\text{solve}\left(\begin{bmatrix} 10 \\ -19 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + s \times \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \{a, s\}\right.$$

$$\{a=-11, s=-3\}$$

Aufgabe 6 – Intervalle

Gegeben sind sechs verschiedene Intervalle.
Für alle Winkel α aus einem dieser Intervalle gilt: $\sin(\alpha) \geq 0$ und $\sin(\alpha) \neq 1$.

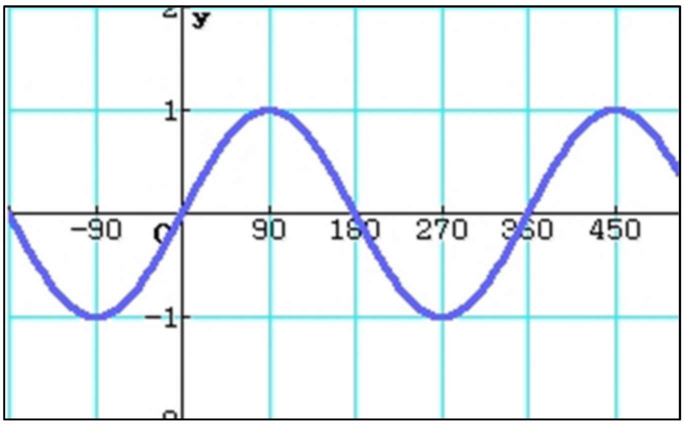
Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie das zutreffende Intervall an. *[1 aus 6]*

[270°; 360°)	☐
[90°; 180°]	☐
(0°; 180°)	☐
[0°; 90°)	☐
(90°; 270°]	☐
[180°; 270°]	☐

Lösung

Man zeichnet die Sinusfunktion und entnehme die Lösung aus der Grafik:
[0°; 90°)



Aufgabe 13 – Körpermaße eines Babys

Die Körpermasse von Babys in den ersten 6 Lebenswochen kann näherungsweise mithilfe der Funktion $G\colon [0; 6] \to \mathbb{R}$ mit $G(t) = G_0 + 190 \cdot t$ modelliert werden.

t ... Zeit nach der Geburt in Wochen
$G(t)$ ... Körpermasse eines Babys zur Zeit t in g
G_0 ... Körpermasse eines Babys bei der Geburt in g

Nora hat bei ihrer Geburt eine Körpermasse von 3 200 g.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie mithilfe der Funktion G die relative Änderung der Körpermasse von Nora von der Geburt bis 6 Wochen nach der Geburt in Prozent.

Lösung

Define $G(t)=190t+3200$

done

$$\frac{G(6)-G(0)}{G(0)}$$

0.35625

Antwort: Die relative Änderung beträgt **35,625 %**.

Aufgabe 16 – Stammfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der reellen Funktion f: $[0; 8] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$.
Die Funktion F mit $F(0) = 0$ ist eine Stammfunktion von f. Die gekennzeichneten Punkte haben ganzzahlige Koordinaten.

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in der obigen Abbildung den Graphen von F im Intervall [0; 8] unter Verwendung der Funktionswerte $F(0)$, $F(4)$ und $F(8)$.

Lösung

Define $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 4 \\ -\frac{1}{4}x+2, & 4\le x\le 8 \end{cases}$

done

$\int_{\square}^{\square} -\frac{1}{4}x+2\,dx$

$\frac{-x^2}{8}+2\cdot x$

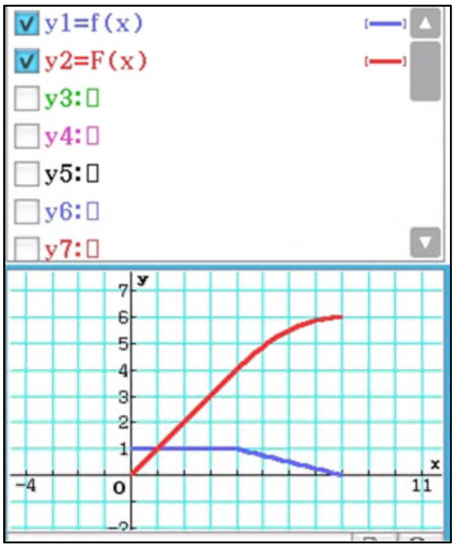
solve$(-0.125\cdot x^2+2\cdot x+c=4, c)\,|\,x=4$

$\{c=-2\}$

Define $F(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 4 \\ \frac{-x^2}{8}+2\cdot x-2, & 4\le x\le 8 \end{cases}$

done

Grafik & Tabelle



Anmerkung
Um F(x) im gesamten Intervall [0;8] ohne Unstetigkeitsstelle zu konstruieren, muss für beide "Teilfunktionen" F(4)=4 gelten. Deshalb wird in einem Zwischenschritt der Wert des konstanten Faktors "c" für den 2. Teil entsprechend berechnet.

Aufgabe 17 – Polynomfunktion dritten Grades

Vom Graphen einer Polynomfunktion dritten Grades f sind der Tiefpunkt $T = (-1\,|\,2)$ sowie der Hochpunkt $H = (1\,|\,4)$ bekannt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Die Funktion f ist im Intervall (1; 3) streng monoton fallend.	☐
Die Funktion f weist im Intervall (–1; 1) einen Monotoniewechsel auf.	☐
Die Funktion f ist im Intervall (–3; 1) streng monoton fallend.	☐
Die Funktion f ist im Intervall (–1; 1) durchgehend rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).	☐
Die Funktion f weist im Intervall (0; 2) einen Monotoniewechsel auf.	☐

Anmerkung
Mit dem ClassPad kann man sich den Luxus leisten, eine Funktionsgleichung, welche die obigen Bedingungen erfüllt, zu ermitteln. Danach führt man eine grafische Überprüfung durch.

Lösung

Define $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
done

Define $f1(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$
done

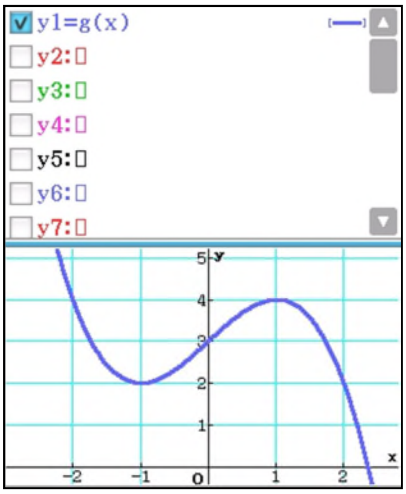
$$\begin{cases} f(-1)=2 \\ f(1)=4 \\ f1(-1)=0 \\ f1(1)=0 \end{cases}\Bigg|_{a,b,c,d}$$

$$\left\{a=-\frac{1}{2}, b=0, c=\frac{3}{2}, d=3\right\}$$

$f(x)\,|\,\left\{a=-\frac{1}{2}, b=0, c=\frac{3}{2}, d=3\right\}$

$$\frac{-x^3}{2}+\frac{3\cdot x}{2}+3$$

Define $g(x)=\frac{-x^3}{2}+\frac{3\cdot x}{2}+3$



Antwort: **1** und **5**

Aufgabe 20 – Durchschnittseinkommen

Von allen Beschäftigten eines bestimmten Unternehmens arbeiten 40 % im Vertrieb und 52 % in der Produktion. Die übrigen Beschäftigten arbeiten in der Verwaltung.

Die nachstehende Tabelle gibt Auskunft über die durchschnittlichen Nettojahreseinkommen im Jahr 2018.

	durchschnittliches Nettojahreseinkommen 2018 pro Person (in Euro)
Vertrieb	26376
Produktion	28511
Verwaltung	23427

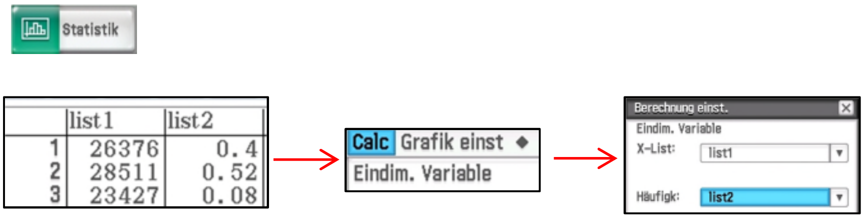
Aufgabenstellung:

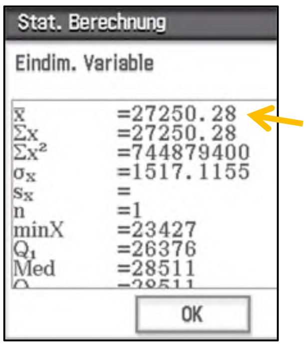
Berechnen Sie für dieses Unternehmen das durchschnittliche Nettojahreseinkommen pro Person im Jahr 2018.

Lösung Variante 1

```
26376×0.4+28511×0.52+23427×0.08
                                 27250.28
```

Lösung Variante 2





Antwort: **€ 27.250,28**

Aufgabe 21 – Neugeborene

In der nachstehenden Tabelle ist die Anzahl der Neugeborenen in Österreich hinsichtlich ihres Geburtsgewichts (Masse unmittelbar nach der Geburt) für das Jahr 2018 angegeben.

Geburtsgewicht	Anzahl der Neugeborenen
weniger als 2500 g	5282
mindestens 2500 g und weniger als 3500 g	47152
mindestens 3500 g	32370

Datenquelle: https://www.statistik.at/wcm/idc/idcplg?IdcService=GET_PDF_FILE&RevisionSelectionMethod=LatestReleased&dDocName=110630 [10.04.2020].

Bei einem Geburtsgewicht von weniger als 2500 g wird ein Neugeborenes als „untergewichtig" eingestuft.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie für das Jahr 2018 den relativen Anteil der Neugeborenen in Österreich, die als „untergewichtig" eingestuft worden sind.

Lösung

$$\frac{5282}{84804}$$

0.06228479789

Antwort: Der relative Anteil beträgt **6,23 %**.

Aufgabe 24 – Binomialverteilte Zufallsvariable

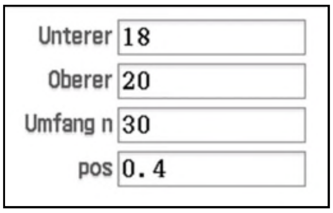
Bei einem bestimmten Zufallsversuch tritt entweder „Erfolg“ oder „Misserfolg“ ein. Dieser Zufallsversuch wird 30-mal durchgeführt. Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt an, wie oft dabei „Erfolg“ eintritt. Für den Erwartungswert gilt: $E(X) = 12$.

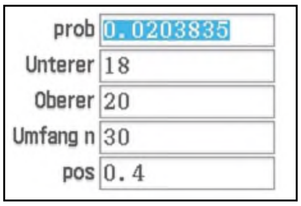
Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(18 \leq X \leq 20)$.

$P(18 \leq X \leq 20) =$ ______________________________

Lösung





Antwort: Die Wahrscheinlichkeit beträgt **0,0204** oder **2,04 %**.

Anmerkung
Die Wahrscheinlichkeit von p=0,4 erhält man aus der Formel für den Erwartungswert bei einer binomial verteilten Zufallsvariable: $E(X)=n\cdot p$.

In diesem Beispiel: $12 = 30\cdot p$

Aufgabe 25 – Fahrradtour

a) Bettina macht eine 2-stündige Fahrradtour. Ihre Geschwindigkeit kann dabei näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden.

$v(t) = -0{,}08 \cdot t^2 + 16 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 2$

t … Zeit in h mit $t = 0$ für den Beginn der Fahrradtour
$v(t)$ … Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in km/h

1) Berechnen Sie die Zeitdauer, die Bettina für die ersten 10 km dieser Fahrradtour benötigt. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 1$. Geben Sie auch die zugehörige Einheit an. *[0/½/1 P.]*

Lösung

```
Define v(t)=-0.08t^2+16
                                        done
solve(∫_0^x v(t)dt=10, x)|0≤x≤2
                           {x=0.6254076978}
toDMS(0.6254076978
                          0°37'31.46771208"
```

Antwort: a1) Bettina benötigt für die ersten 10 km rund **0,625 Stunden** oder rund **37 Minuten**.

```
Define a(t)=d/dt(v(t))
                          done
a(1)
                         -0.16
```

Antwort: a2) Die Beschleunigung beträgt **-0,16 km/h²**

b) Der empfohlene Reifendruck eines Fahrradreifens sinkt mit zunehmender Breite des Reifens. Für einen empfohlenen Reifendruck von 2 bar bis 9 bar kann der empfohlene Reifendruck näherungsweise durch die Funktion p beschrieben werden.

$p(x) = 19{,}1 \cdot e^{-0{,}0376 \cdot x}$

x ... Breite des Reifens in mm
$p(x)$ ... empfohlener Reifendruck bei der Breite x in bar

1) Ermitteln Sie das größtmögliche Intervall für die Breite des Reifens, für das sich ein empfohlener Reifendruck von 2 bar bis 9 bar ergibt. *[0/1 P.]*

Lösung

```
solve(p(x)=2,x
              {x=60.01439241}
solve(p(x)=9,x
              {x=20.01233398}
```

Antwort: b1) **[20;60]** mm

Aufgabe 27 – Weltbevölkerung

In der nachstehenden Tabelle ist für bestimmte Kalenderjahre die Schätzung der Weltbevölkerung (jeweils zur Jahresmitte) angegeben.

Kalenderjahr	Weltbevölkerung in Milliarden
1850	1,260
1900	1,650
1950	2,536
1960	3,030
1970	3,700
1990	5,327
2000	6,140
2010	6,957
2020	7,790

a) Im Zeitraum von 1850 bis 1950 hat sich die Weltbevölkerung annähernd verdoppelt. Nehmen Sie für diesen Zeitraum an, dass die Weltbevölkerung jährlich um den gleichen Prozentsatz gewachsen ist.

1) Berechnen Sie diesen Prozentsatz. *[0/1 P.]*

Lösung

```
solve(1260×p^100=2536,p
{p=-1.007019284,p=1.0070
```

Antwort: a1) p=**0,7 %**.

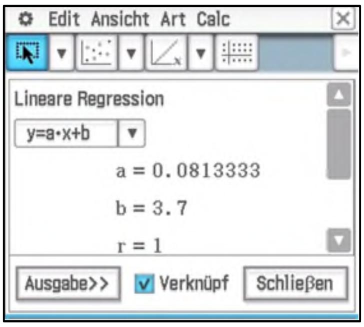
b) Ab 1970 kann die Entwicklung der Weltbevölkerung näherungsweise durch eine lineare Funktion *f* beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Werte für die Weltbevölkerung der Kalenderjahre 1970 und 2000 eine Funktionsgleichung von *f* in Abhängigkeit von der Zeit *t* auf (*t* in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1970, $f(t)$ in Milliarden). *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der mithilfe von *f* ermittelte Wert für das Kalenderjahr 2020 vom in der obigen Tabelle angegebenen Wert abweicht. *[0/1 P.]*

Lösung

	A	B	C
1	1970	0	3,7
2	2000	30	6,14



Define $f(t)=0.0813333\times t+3.7$	done
$f(50)$	7.766665
$\frac{7.7667\times 100}{7.790}$	99.70089859
100−ans	0.2991014121

Antwort: b1) $f(t)=\mathbf{0{,}081333 \cdot t + 3{,}7}$ Antwort: b2) um **0,3 %**

c) In einem anderen Modell wird die Entwicklung der Weltbevölkerung ab 1970 durch die Funktion *g* modelliert.

$g(t) = 3{,}7 \cdot e^{-0{,}0001 \cdot t^2 + 0{,}02 \cdot t}$

t ... Zeit ab 1970 in Jahren
$g(t)$ ... Weltbevölkerung zur Zeit *t* in Milliarden

Gemäß diesem Modell wird die Weltbevölkerung zunächst zunehmen und in weiterer Folge abnehmen.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion *g* das Maximum der Weltbevölkerung und das Kalenderjahr, in dem dies gemäß dem Modell eintreten soll.

Lösung

Define $g(t)=3.7\times e^{-0.0001\times t^2+0.02t}$	done
Define $g1(t)=\frac{d}{dt}(g(t))$	done
Define $g2(t)=\frac{d}{dt}(g1(t))$	done
solve$(g1(t)=0,t)$	$\{t=100\}$
$g2(100)$	−0.00201152855
$g(100)$	10.05764277

Antwort c1) Maximum rund **10,6** Milliarden im Kalenderjahr **2070** (100 Jahre)

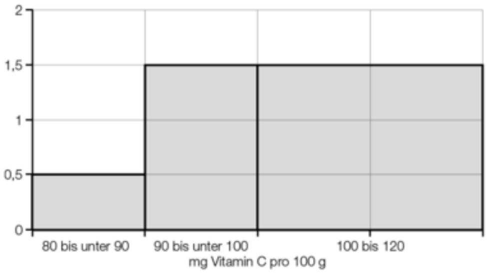
Aufgabe 28 – Vitamin C

Vitamin C erfüllt viele wichtige Aufgaben im menschlichen Körper.

Aufgabenstellung:

a) Brokkoli enthält durchschnittlich 100 mg Vitamin C pro 100 g.

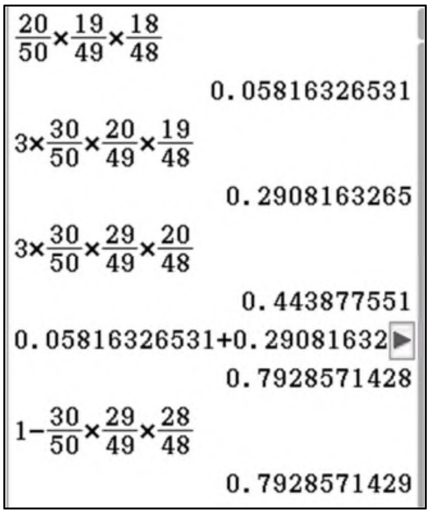
Bei einem Gemüsegroßhändler wird eine Zufallsstichprobe von 50 Portionen frischem Brokkoli entnommen und für jede Portion der Vitamin-C-Gehalt pro 100 g gemessen.
Der Flächeninhalt eines Rechtecks im nachstehenden Histogramm entspricht der absoluten Häufigkeit der Portionen dieser Stichprobe im jeweiligen Bereich.



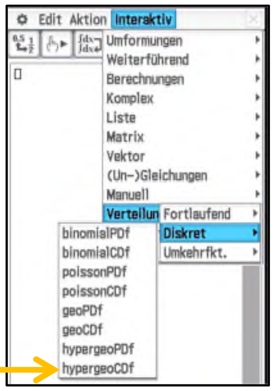
Von der Zufallsstichprobe werden 3 Portionen ohne Zurücklegen entnommen.

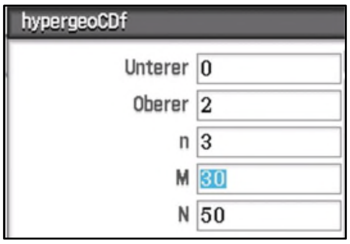
2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 dieser Portionen 100 mg bis 120 mg Vitamin C pro 100 g aufweisen. *[0/1 P.]*

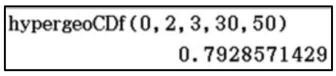
Lösung Variante 1



Lösung Variante 2 –







Antwort: a2) Die Wahrscheinlichkeit beträgt **79,3 %**.

b) Ein Getränkehersteller möchte Fruchtsaft so in Flaschen abfüllen, dass jede Flasche 100 mg Vitamin C enthält.

Es stehen zur Verfügung:

- Birnensaft mit 20 mg Vitamin C pro 100 ml
- Orangensaft mit 35 mg Vitamin C pro 100 ml
- Mischungen aus diesen beiden Säften

Die zur Verfügung stehenden Fruchtsäfte werden so gemischt, dass 350 ml Saft genau 100 mg Vitamin C enthalten.

2) Ermitteln Sie, wie viele Milliliter Birnensaft mit wie vielen Millilitern Orangensaft dafür gemischt werden müssen. *[0/1 P.]*

Lösung Variante 1

$$\text{solve}(0.2x+0.35\times(350-x)=100, x)$$
$$\{x=150\}$$

Lösung Variante 2

$$\begin{cases} 0.2x+0.35y=100 \\ x+y=350 \end{cases} \Bigg| x, y$$
$$\{x=150, y=200\}$$

Antwort: b2) Birnensaft: **150 ml**, Orangensaft **200 ml**